١٢

حكومة إقليم كوردستان ـ العراق
وزارة التربية ـ المديرية العامة للمناهج والمطبوعات

الرياضيات للجميع

كتاب الطالب

الصف الثاني عشر الأدبي

الطبعة السادسة
٢٠١٥م / ٢٧١٥ كوردي / ١٤٣٦ هـ

الأشراف الفني على الطبع

عثمان پيرداود كواز

آمانج اسماعيل عبدي

محتوى الكتاب

Content-Student-adabi-G12-13 2/12/15 1:02 PM Page 4

الفصل 1

الإحصاء والاحتمال

Statistics and Probability

الدروس

الدرس 1

بيان الشاربَيْن
Box-and-Whisker Plot

الأهداف

- يجد الرُّبيْع الأدنى والرُّبيْع الأعلى لمجموعة معطيات.
- يحسب المدى والمدى الرُّبَيعي لمجموعة معطيات.
- ينشئ بيان الشاربين لتمثيل تشتُّت مجموعة معطيات.

المفردات
Vocabulary

الرُّبيْع الأدنى	First quartile
الرُّبيْع الأعلى	Third quartile
المدى الرُّبَيعي	Interquartile range
بيان الشاربَيْن	Box-and-Whisker-Plot

لماذا؟

يُمكنك استعمال بيانات الشاربين لمقارنة توزّع المعطيات في مجموعتَيْن من المعطيات المتشابهة كالمتوسّطات الشهرية لدرجات الحرارة.

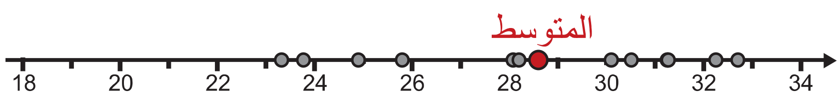
مفهوم التشتُّت Concept of Dispersion

يبيّن الجدولان المقابلان متوسّطات درجات الحرارة على مدى 12 شهرًا في إحدى السنوات في مصيفَي سرجنار في السليمانية وسولاف في دهوك. يبلغ متوسّط قيَم الجدول الأوَّل 27.355 ، بينما يبلغ متوسّط قيَم الثاني 28.51 . إذا مثّلنا قيم الجدولَيْن على محور الأعداد لوجدنا:

متوسّط درجات الحرارة لمدينة سرجنار	
كانون الثاني	16.63
شباط	17.8
آذار	22.94
نيسان	26.37
مايس	32.61
حزيران	35.62
تموز	37.06
آب	36.81
أيلول	33.06
تشرين الأوّل	28.34
تشرين الثاني	22.5
كانون الأول	14.35

متوسّط درجات الحرارة لمدينة سولاف	
كانون الثاني	23.32
شباط	23.77
آذار	25.8
نيسان	28.08
مايس	30.51
حزيران	31.25
تموز	32.7
آب	32.25
أيلول	31.27
تشرين الأوّل	30.1
تشرين الثاني	28.2
كانون الأول	24.9

تمثيل معطيات الجدول الأول على محور الأعداد



تمثيل معطيات الجدول الثاني على محور الأعداد

لاحظ أن متوسِّط الجدول الثاني (28.51) يعبّر عن مجموعة قيَمه بشكل أفضل من متوسِّط الجدول الأول. لأن أكثر قيَم الجدول الثاني قريبة من المتوسِّط، في حين أن أكثر قيَم الجدول الأوَّل بعيدة عن المتوسِّط. تعبّر عن ذلك بالقول إن قيم الجدول الأوَّل أكثر تشتُّتًا من قيم الجدول الثاني.

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 4

يستعمل الإحصائيون قياسات وأدوات بيانية أكثر دقَّة للتعبير عن تشتُّت مجموعة معطيات. تعلَّمت في الصف الحادي عشر كيف تحسب بعض قياسات التشتُّت وكيف تستعملها، مثل المدى والتباين والانحراف المعياري. سوف تتعلَّم في هذا الدرس كيف تحسب قيمًا أخرى وكيف تستعملها بالإضافة إلى تمثيل التشتُّت بيانيًّا.

نشاط

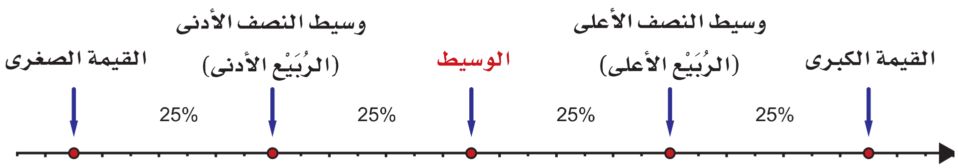
استكشاف الرُبَيعات

يُبيِّن الجدول أدناه المعدَّلات الشهرية لتساقط المطر (بالمِلّيلتر) في إحدى المدن على مدى 12 شهرًا.

الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
المعدَّل	48	57	71	89	124	76	58	56	86	89	58	46

1. جِد وسيط هذه المعدَّلات. ما النسبة المئوية للمعطيات التي تقلّ عن الوسيط؟ ما النسبة المئوية للمعطيات التي تزيد على الوسيط؟
2. جِد وسيط المجموعة التي تتألّف من المعدَّلات التي تقلّ عن هذا الوسيط. ما النسبة المئوية للمعدَّلات التي تقلّ عن هذا الوسيط الجديد؟
3. جِد وسيط المجموعة التي تتألَّف من المعدَّلات التي تزيد على وسيط المجموعة كاملة. ما النسبة المئوية للمعدَّلات التي تقلّ عن هذا الوسيط الجديد؟

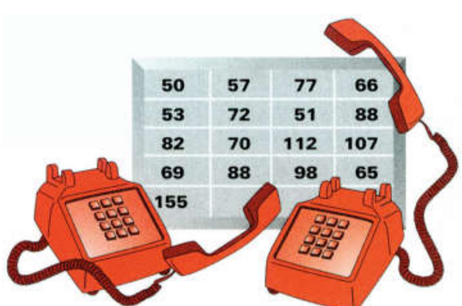
يُمكنك تمثيل ما قُمت به في النشاط السابق كما يلي:



يُسمّي الإحصائيون وسيط النصف الأدنى باسم **الرُبَيْع الأدنى** ويرمزون إليه بالرمز Q_1 ووسيط النصف الأعلى **بالرُبَيْع الأعلى** ويرمزون إليه بالرمز Q_3. أما الرُبَيْع الثاني Q_2 فما هو إلا وسيط المجموعة كاملة. من ناحية أخرى، يُطلق الإحصائيون اسم **المدى الرُبَيْعي**، ويرمزون إليه بالرمز IQR، على $Q_3 - Q_1$. يُسمّي الإحصائيون **قيمة متطرِّفة** في مجموعة المعطيات كل قيمة تقلّ عن $Q_1 - 1.5 \times IQR$ أو تزيد على $Q_3 + 1.5 \times IQR$.

مثـــــال 1

يبيّن الرسم المقابل أعداد المكالمات الهاتفية التي تلقّاها مركز الإطفاء في مدينة دهوك خلال 17 يومًا، تم اختيارها عشوائيًّا.



أ) جِد القيمة الكبرى والقيمة الصغرى والوسيط والرُبَيْعين الأدنى والأعلى والمدى والمدى الرُبَيْعي لمجموعة المعطيات في الرسم المقابل.

ب) جِد القيم المتطرِّفة، إن وُجدت، في هذه المجموعة.

الحل

أ) ابدأ بترتيب القيم صعودًا تحصل على:

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 7

عدد المعطيات 17، وهو عدد فردي مما يجعل الوسيط يساوي القيمة التاسعة أي $Q_2 = 72$. الرُّبَيْع الأدنى هو وسيط مجموعة المعطيات 70 69 66 65 57 53 51 50 . بما أن عدد هذه المعطيات زوجي (8)، فإن الرُّبَيْع الأدنى هو متوسِّط القيمتَيْن الواقعتَيْن في الوسط أي 57 وَ 65. إذن، $Q_1 = \frac{57+65}{2} = 61$. من ناحية أخرى، معطيات الرُّبَيْع الأعلى هي 77 82 88 88 98 107 112 155 وعددها زوجي أيضًا (8). وسيط هذه المجموعة هو متوسِّط القيمتَيْن الواقعتَيْن في الوسط أي 88 وَ 98. إذن، $Q_3 = \frac{88+98}{2} = 93$.

القيمة الكبرى هي 155، والقيمة الصغرى هي 50 . المدى هو $155 - 50 = 105$ والمدى الرُّبَيْعي هو $93 - 61 = 32$. بوسعك أن تُلخِّص ما توصَّلت إليه كما يلي:

50 51 53 57 65 66 69 70 72 77 82 88 88 98 107 112 155

القيمة الصغرى (50) ، الرُّبَيْع الأدنى (61) ، الوسيط (72) ، الرُّبَيْع الأعلى (93) ، القيمة الكبرى (155)

$IQR = 32$

المدى $= 105$

ب لإيجاد القيم المتطرِّفة، ابدأ بحساب كل من $Q_1 - 1.5 \times IQR$ وَ $Q_3 + 1.5 \times IQR$

$Q_1 - 1.5 \times IQR = 61 - 1.5 \times 32 = 13$ وَ $Q_3 + 1.5 \times IQR = 93 + 1.5 \times 32 = 141$

لا توجد قيمة أقلّ من 13، بينما توجد قيمة واحدة (155) أكبر من 141، مما يعني أن هناك قيمة متطرِّفة واحدة هي 155.

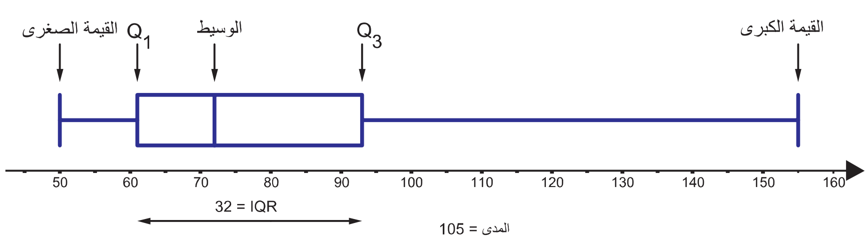
حـــاولْ جِد القيمة الكبرى والقيمة الصغرى والوسيط والرُّبَيْعين الأدنى والأعلى والمدى والمدى الرُّبَيْعي لمجموعة المعطيات في الجدول أدناه. جِد القيَم المتطرِّفة.

4	7	9	31	34	2	35	37	24	34	31	50
11	33	36	2	8	13	52	57	60	69	78	83

تفكير ناقد هل بوسعك أن تُعطي تفسيرًا لوجود القيمة المتطرِّفة في المثال 1؟

بيان الشاربَيْن Box-and-Whisker Plot

بيان الشاربَيْن رسم بيانيّ يُبيِّن كيفية توزُّع القيم في مجموعة معطيات. فيما يلي بيان الشاربَيْن لمجموعة معطيات المثال 1.



لاحظ أن بيان الشاربَيْن يتحدَّد بخمس قيَم إحصائية: القيمة الكبرى والقيمة الصغرى والوسيط والرُّبَيْع الأدنى والرُّبَيْع الأعلى.

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 6

تفكير ناقد أي جزء من بيان الشاربَيْن يُمثِّل 50% من المعطيات؟

خطوات إنشاء بيان الشاربَيْن	
الخطوة 1	ترتيب القيم صعودًا وحساب الوسيط والرُّبَيْع الأدنى والرُّبَيْع الأعلى.
الخطوة 2	رسم محور أعداد يتضمَّن القيمتَيْن الكبرى والصغرى.
الخطوة 3	رسم مستطيل يمتد من قيمة Q_1 إلى قيمة Q_3.
الخطوة 4	رسم خط عمودي يقسم المستطيل عند الوسيط.
الخطوة 5	رسم قطعة مستقيمة أفقية تمتد من Q_1 إلى القيمة الصغرى وقطعة مستقيمة عمودية عند القيمة الصغرى، ثم رسم قطعة مستقيمة أفقية تمتد من Q_3 إلى القيمة الكبرى، وقطعة مستقيمة عمودية عند القيمة الكبرى.

مثـــــال 2 بالعودة إلى المسألة المطروحة في بداية الدرس، ارسم بيان الشاربَيْن لمعدَّلات درجات الحرارة لكل من مصيفي سرجنار وسولاف، ثم قارن بين المجموعتَيْن باستعمال بيانَيِ الشاربَيْن.

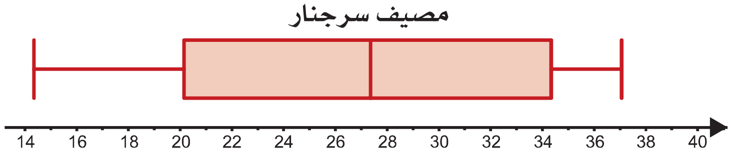
الحل

ابدأ بحساب القيَم الخمس لكل مجموعة. سوف تحصل على النتائج التالية:

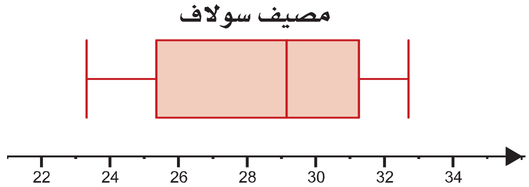
	سولاف	سرجنار
القيمة الصغرى	23.32	14.35
الرُّبيع الأدنى	25.35	20.15
الوسيط	29.15	27.36
الرُّبيع الأعلى	31.26	34.34
القيمة الكبرى	32.70	37.06

ارسم، بعد ذلك، بيان الشاربَيْن لكل مجموعة.

مصيف سرجنار



مصيف سولاف



تُعبِّر استطالة المستطيل والشاربان في بيان سرجنار عن أن درجات الحرارة في مدينة سرجنار تتغيَّر أكثر مما تتغيَّر درجات الحرارة في مدينة سولاف، حيث المستطيل والشاربان أقل استطالة. تُظهر المقارنة بين بيانَيِ الشاربَيْن أن أدنى معدَّل لدرجات الحرارة في سولاف هو أعلى من أدنى معدَّل لدرجات الحرارة في سرجنار، وأن أعلى معدَّل لدرجات الحرارة في سولاف هو أقل من أعلى معدَّل لدرجات الحرارة في سرجنار.

حـــاولْ جِد المدى الرُّبَيْعي لمعدَّلات درجات الحرارة في كل من مصيفي سرجنار وسولاف. ما الذي تستخلصه من هاتَيْن القيمتَيْن؟

تفكير ناقد هل يُمكن لبيان الشاربَيْن أن يكون بشارب واحد؟ أن يكون بلا شاربَيْن؟ وضِّح جوابك.

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1. أوضح الفرق بين إيجاد الوسيط والرُّبَيْعَيْن الأدنى والأعلى لمجموعة من 20 قيمة، ومجموعة من 15 قيمة.

2. ماذا يُخبرك بيان الشاربَيْن عن مجموعة المعطيات التي يُمثِّلها؟

3. أنشئ مجموعتَيْ معطيات، وسيط كل منهما 7 ورُبَيْعها الأدنى $Q_1 = 5$ ورُبَيْعها الأعلى $Q_3 = 11$.

تمارين موجّهة

4. **بيئة** يُبيّن الجدول أطوال 24 حشرة (بالملّيمتر) من نوع معيَّن من الحشرات.

28	30	38	34	36	31	28	25
32	34	27	29	30	26	33	35
29	38	31	25	29	31	25	37

أ جِد القيمة الصغرى والقيمة الكبرى والوسيط والرُّبَيْعين الأدنى والأعلى والمدى والمدى الرُّبَيْعي لهذه المعطيات.

ب ابحث إن كانت المجموعة تتضمَّن قيَمًا متطرِّفة وحدِّدها في حال وجودها.

5. **اجتماع** يُبيّن الجدول المقابل النسب المئوية للنسوة العاملات في عدد من الدول المتقدّمة للعامَيْن 1980 وَ 1992.

الدولة	1980	1992
أستراليا	36.4	42.1
كندا	39.7	45.5
فرنسا	39.5	43.8
ألمانيا	38.0	42.0
اليابان	38.4	40.5
السويد	45.2	48.3
بريطانيا	40.4	44.9
الولايات المتحدة	42.4	45.7

أ جِد الوسيط والرُّبَيْعَيْن الأدنى والأعلى لمعطيات كل من السنتَيْن.

ب أنشئ بيان الشاربَيْن لمعطيات كل من السنتَيْن.

ج قارن بين البيانَيْن.

تمارين وتطبيقات

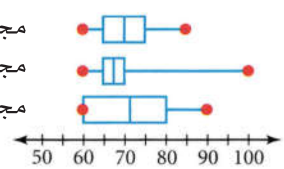
جِد، لكل مجموعة معطيات، القيمة الصغرى والقيمة الكبرى والوسيط والرُّبَيْع الأدنى والرُّبَيْع الأعلى والمدى والمدى الرُّبَيْعي، ثم ارسم بيان الشاربَيْن العائد إليها.

6. 42 ، 45 ، 56 ، 48 ، 59 ، 60 ، 51 ، 54 ، 44 ، 51 ، 50 ، 44 ، 42 ، 49 ، 56.

7. 22 ، 50 ، 78 ، 22 ، 77 ، 93 ، 27 ، 86 ، 14.

8. 8 ، 2 ، 8 ، 2 ، 8 ، 3 ، 2 ، 2.

تقدَّمت 3 مجموعات من الطلاب إلى الاختبار نفسه. استعمل بيانات الشاربَيْن لدرجات هذه المجموعات الثلاث للإجابة عن الأسئلة من 9 إلى 12.



9 أي مجموعة كان لها أعلى الدرجات الكبرى؟

10 أي مجموعة كان لها المدى الأكبر؟

11 أي مجموعة كان لها الوسيط الأكبر؟

12 أي مجموعة كان لها المدى الرُّبَيْعي الأكبر؟

13 يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن أطوال 24 حشرة من نوع معيَّن من الحشرات بالسنتيمتر.

2.5	2.8	3.1	3.6	3.4	3.8	3.0	2.8	3.5	3.3	2.6	3.0
2.9	2.7	3.4	3.2	3.7	2.5	3.1	2.9	2.5	3.1	3.8	2.9

أ جِد القيمة الصغرى والقيمة الكبرى والوسيط والرُّبَيْع الأول والرُّبَيْع الثالث والمدى الرُّبَيْعي لهذه المعطيات.

ب هل تتضمّن هذه المجموعة قيَمًا متطرِّفة؟ إذا كان الجواب نعم، فما هي تلك القيم؟

تــذكَّــرْ

إذا كان A ،B حدثين في تجربة عشوائية فإنهما يكونان:

1. متنافيين عندما:
$P(A \cap B) = \varnothing,$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

2. غير متنافيين عندما:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

نظرة إلى الوراء

14 جِد المتوسِّط والوسيط والمنوال للمعطيات التالية: 2، 16، 4، 11، 14، 8، 17، 19، 13، 19، 9، 15، 8، 13، 17.

15 جِد المدى والانحراف المعياري للمعطيات التالية: 12، 73، 11، 96، 45، 21، 16، 98، 13.

نظرة إلى الأمام

16 شيرين في الصف الحادي عشر وأختها زهرة في الصف الثاني عشر. جرى في كل صف اختيار مندوب بالقرعة. ما احتمال أن يتم اختيار زهرة وأختها شيرين علمًا بأن في الصف الحادي عشر 30 طالبًا وطالبة وفي الصف الثاني عشر 25 طالبًا وطالبة؟

الدرس 2

الاحتمال الشرطي والاحتمال الشامل
Conditional and Total Probabilities

لماذا؟ يُمكن للمحلّلين السياسيين أن يستندوا إلى المعطيات الديموغرافية والاحتمال لتوقُّع نتائج الانتخابات.

الأهداف

- يجد احتمال حدث بمعرفة أن حدثًا آخر قد تحقَّق.
- يذكر شرط استقلال حدثَيْن ويستعمله.
- يذكر قانون الاحتمال الشامل ويستعمله.

المفردات Vocabulary

الاحتمال الشرطي Conditional probability
الأحداث المستقلة Independent events
الاحتمال الشامل Total probability

الاحتمال الشرطي Conditional Probability

تحتاج، في كثير من التجارب العشوائية، إلى تحديد احتمال حدث A مع العلم بأن حدثًا آخر B قد تحقق، كأن تعرف احتمال أن يكون شخص اختير عشوائيًّا قد اقترع للائحة 725 علمًا بأنه من محافظة السليمانية. فإذا كان الحدث B «الشخص المُختار من محافظة السليمانية» ، وَ A «اقترع الشخص للائحة 725»، يستعمل العاملون في حقل الرياضيات الكتابة $P(A/B)$ للتعبير عن تحقُّق A علمًا بأن B قد تحقَّق، ويُسمّون هذا الاحتمال **احتمالاً شرطيًّا**.

تعريف الاحتمال الشرطي

إذا كان A وَ B حدثَيْن في تجربة عشوائية، وكان احتمال $P(B)\neq 0$ ، فإن **الاحتمال الشرطي** لتحقُّق A علمًا بأن B قد تحقَّق هو:

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

يُقرأ الرمز $P(A/B)$ كما يلي: احتمال A إذا B .

مثـــال 1

يحتوي كيس على 10 كرات حمراء تحمل الأعداد من 1 إلى 10، وخمس كرات زرقاء تحمل الأعداد الفردية من 1 إلى 9. جرى سحب كرة من الكيس. ما احتمال أن تحمل الكرة العدد 9 علمًا بأنها حمراء؟

الحل

فضاء الاحتمالات عند سحب الكرة هو:

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

الحدث B هو «الكرة حمراء» أي $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

الحدث A هو «تحمل الكرة العدد 9» أي $\{9, 9\}$.

أما الحدث $A\cap B$ فهو $\{9\}$.

ينتج ممّا سبق: $P(B)=\frac{10}{15}$ وَ $P(A\cap B)=\frac{1}{15}$ ، وبالتالي $P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{15}}{\frac{10}{15}}=\frac{1}{10}$

إذن، احتمال أن تحمل الكرة الرقم 9 علمًا بأنها حمراء هو $P(A/B)=\frac{1}{10}$.

لا بد لك من ملاحظة أن شرط كون الكرة المسحوبة حمراء قد غيّر فضاء الاحتمالات بحيث أصبح

$$\{⑩, ⑨, ⑧, ⑦, ⑥, ⑤, ④, ③, ②, ①\}$$

وأن الحدث A قد أصبح «سحب كرة تحمل الرقم 9» من كيس فيه 10 كرات مرقّمة من 1 إلى 10، ممّا يجعل احتمال تحقّق الحدث A إذا B احتمال اختيار الكرة التي تحمل الرقم 9 من بين 10 كرات تحمل الأرقام من 1 إلى 10، أي $\frac{1}{10}$.

حـــاولْ تمّ سحب كرة من كيس فيه 10 كرات حمراء مرقّمة من 1 إلى 10 وَ 5 كرات زرقاء مرقّمة بأرقام فردية من 1 إلى 9. ما احتمال أن تحمل هذه الكرة الرقم 3 علمًا بأنها زرقاء؟

مثـــــال 2

يُبيّن الجدول المقابل توزُّع الأصوات (بالآلاف) على المحافظات الخمس التي تتألّف منها إحدى الدول في الانتخابات الرئاسية، حيث كان المرشّح 1 وَالمرشّح 2 المرشّحَيْن الرئيسيّيْن.

المحافظة	المرشّح 1	المرشّح 2	الآخرون
1	581	472	5
2	345	336	4
3	349	207	3
4	260	210	3
5	148	197	5

أ ما احتمال أن يكون مقترع قد صوّت للمرشّح 1، علمًا أنه من المحافظة 3؟

ب ما احتمال أن يكون المقترع من المحافظة 2 وصوّت للمرشّح 2؟

الحل

أ إذا كان الحدث A «صوّت المقترع للمرشّح 1» وَ B «المقترع من المحافظة 3» فإن المطلوب هو إيجاد احتمال تحقّق الحدث A، علمًا بأن الحدث B قد تحقق: $P(A/B)=\frac{349}{559}\approx 0.624$.

ب إذا كان الحدث A «المقترع من المحافظة 2» وَ B «المقترع صوّت للمرشّح 2» فإن المطلوب هو إيجاد احتمال تحقّق الحدث $A\cap B$.

$$P(A\cap B)=P(A/B)\times P(B)$$

غير أن $P(A/B)=\frac{336}{1422}$ وَ $P(B)=\frac{1422}{3125}$

إذن،

$$P(A\cap B)=\frac{1422}{3125}\times\frac{336}{1422}\approx 0.108$$

حـــاولْ

أ جِد احتمال أن يكون مقترع من المحافظة 5 قد اقترع لمرشّح غير المرشّحَيْن الرئيسيّيْن.

ب جِد احتمال أن يكون المقترع من المحافظة 1 وصوّت للمرشّح 1.

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 13

الأحداث المستقلة Independent Events

تعريف الحدثين المستقلّين

تقول عن حدثَيْن A وَ B في تجربة عشوائية أنهما **مستقلان** إذا كان احتمال تحقُّق أحدهما لا يتأثر بتحقُّق الآخر أو عدم تحقُّقه، أي إذا كان $P(A/B)=P(A)$ وَ $P(B/A)=P(B)$.

فإذا رميت مكعَّبَيْ أعداد، أحدهما أحمر والثاني أزرق، فإن احتمال الحدث A «ظهور عدد زوجي على الأحمر» لا يتأثر بتحقُّق الحدث B «ظهور عدد زوجي على الأزرق» أو عدم تحقُّقه. هذان الحدثان مستقلّان.

إذا كان الحدثان A وَ B مستقلَّيْن فإن $P(A/B)=P(A)$ وَيُصبح لدينا
$P(A)=P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$ أي $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

شرط استقلال حدثَيْن

يكون الحدثان A وَ B في تجربة عشوائية مستقلَّيْن إذا، وفقط إذا، كان
$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

مثــــــال 3

إذا عدت إلى التجربة العشوائية القاضية برمي مكعَّبَيْ أعداد، أحمر وأزرق، فما احتمال أن يكون العددان الظاهران على المكعَّبَيْن زوجيَّيْن؟

الحل

إذا كان A الحدث «ظهور عدد زوجي على المكعَّب الأحمر» وَ B «ظهور عدد زوجي على المكعَّب الأزرق» فإن $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$. بما أن الحدثَيْن مستقلاّن، فإن

$$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

حـــاولْ رمى سامي مكعَّبَيْ أعداد، أحمر وأزرق، ما احتمال أن يكون مجموع العددَيْن الظاهرَيْن 8 علمًا بأن المجموع زوجي؟

يُمكنك التحقُّق من النتيجة إذا تفحَّصْت فضاء الاحتمالات لهذه التجربة العشوائية وحسبت عدد عناصره من جهة، وعدد العناصر التي تُحقِّق الحدث $A\cap B$ من جهة أخرى، وكوَّنت نسبة الثاني إلى الأوَّل.

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

مثـــال 3

سحب أحمد بطاقتَيْن، الواحدة بعد الأخرى، من بطاقات اللعب. سمِّ A الحدث «البطاقة الأولى بطاقة ملك» وَ B الحدث «البطاقة الثانية بطاقة ملك».

أ) أعاد أحمد البطاقة الأولى إلى مجموعة البطاقات قبل سحب البطاقة الثانية. هل الحدثان A وَ B مستقلاّن؟ جِد احتمال الحدث $A \cap B$.

ب) لم يُعِد أحمد البطاقة الأولى إلى مجموعة البطاقات قبل سحب البطاقة الثانية. هل الحدثان A وَ B مستقلان؟ جِد احتمال الحدث $A \cap B$.

الحل

أ) تتألّف مجموعة بطاقات اللعب من 52 بطاقة بينها 4 بطاقات ملك.
احتمال الحدث A هو $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ واحتمال الحدث B هو أيضًا $P(B)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$
لأن البطاقة الأولى أعيدت إلى المجموعة. إذن، احتمال B علمًا بأن A قد تحقَّق هو
$P(B/A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}=P(B)$ مما يُثبت أن الحدثَيْن مستقلاّن وبالتالي

$$P(A \cap B)=P(A)\times P(B)=\frac{1}{13}\times\frac{1}{13}=\frac{1}{169}$$

ب) احتمال الحدث A هو $P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$ واحتمال الحدث B هو $P(B)=\frac{3}{51}$ لأن المجموعة، بعد سحب البطاقة الأولى، أصبحت تتألَّف من 51 بطاقة من بينها 3 بطاقات ملك. إذن، احتمال B علمًا بأن A قد تحقَّق لا يساوي احتمال B، مما يُثبت أن الحدثَيْن غير مستقلَّيْن وبالتالي

$$P(A \cap B)=P(A)\times P(B/A)=\frac{1}{13}\times\frac{3}{51}=\frac{3}{663}$$

حـــاولْ

يحتوي كيس على 5 كرات بيضاء وَ 3 كرات سوداء. تم سحب كرتَيْن الواحدة بعد الأخرى. حدِّد في كل مرة إن كان الحدثان مستقلَّيْن أم لا.

أ) الحدث A هو «الكرة الأولى بيضاء» والحدث B هو «الكرة الثانية سوداء»، علمًا بأن الكرة الأولى أعيدت إلى الكيس قبل سحب الثانية.

ب) الحدث A هو «الكرة الأولى بيضاء» والحدث B هو «الكرة الثانية سوداء»، علمًا بأن الكرة الأولى لم تُعَد إلى الكيس قبل سحب الثانية.

الاحتمال الشامل Total Probability

نشاط

رمت شيرين مكعَّبَيْ أعداد، أزرق وأحمر. يُمثِّل الشكل التالي فضاء الاحتمالات لهذه التجربة العشوائية. إذا كان A_k الحدث «مجموع العددَيْن الظاهرَيْن يساوي k»، أجب عن كل مما يلي:

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 15

1 1	1 2	1 3	1 4	1 5	1 6
2 1	2 2	2 3	2 4	2 5	2 6
3 1	3 2	3 3	3 4	3 5	3 6
4 1	4 2	4 3	4 4	4 5	4 6
5 1	5 2	5 3	5 4	5 5	5 6
6 1	6 2	6 3	6 4	6 5	6 6

.1 اكتب كلاًّ من الأحداث التالية على صورة مجموعة: A_2، A_3، A_4، A_5، A_6، A_7، A_8، A_9، A_{10}، A_{11}، A_{12}. جِد احتمال كل حدث. تحقَّق من أن مجموع احتمالاتها يساوي 1.

.2 بيّن أن أي حدثَيْن من الأحداث السابقة متنافيان.

.3 بيّن أن أي مُخرج ممكن لهذه التجربة العشوائية ينتمي إلى حدث واحد من الأحداث السابقة.

.4 اكتب، على صورة مجموعة، الحدث B : «مجموع العددَيْن الظاهرَيْن لا يزيد على 5» وَجِد احتمال تحقُّقه.

.5 اكتب كلاًّ من الأحداث التالية على صورة مجموعة $B\cap A_2$، $B\cap A_3$، $B\cap A_4$، $B\cap A_5$، $B\cap A_6$، $B\cap A_7$، $B\cap A_8$، $B\cap A_9$، $B\cap A_{10}$، $B\cap A_{11}$، $B\cap A_{12}$. جِد احتمال كل منها.

.6 تحقَّق من أن مجموع الاحتمالات في السؤال السابق هو $P(B)$.

بالاستناد إلى النشاط السابق، فإن بوسعنا أن نكتب

$$P(B)=P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+\ldots+P(B\cap A_{12})$$

العلاقة السابقة هي حالة خاصَّة من قانون **الاحتمال الشامل**.

قانون الاحتمال الشامل

إذا كانت A_1، A_2، ...، A_n أحداث في تجربة عشوائية بحيث يُحقِّق كل مُخرَج من مُخرَجاتها واحدًا فقط من هذه الأحداث، وإذا كان B حدثًا من أحداث التجربة العشوائية فإن:

$$P(B)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+\ldots+P(B\cap A_n)$$

مثـــال 4

تقدَّم 60% من طلاّب الصف الثاني عشر من إعدادية رزكارى إلى امتحانات الفرع العلمي، وتقدَّم الباقون إلى امتحانات الفرع الأدبي. كانت نسبة النجاح 70% في الفرع العلمي وَ 60% في الفرع الأدبي. اختير طالب من طلاب الصف الثاني عشر عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون هذا الطالب ناجحًا؟

الحل

سوف نستعمل الأحداث التالية:

S : «تقدَّم الطالب إلى امتحانات الفرع العلمي».

L : «تقدَّم الطالب إلى امتحانات الفرع الأدبي».

A : «نجح الطالب في امتحان الثانوية العامّة».

الواضح أن كل مُخرَج من مُخرَجات هذه التجربة العشوائية يُحقِّق أحد الحدثَيْن S أو L ولا يحقِّقهما معًا. يُمكننا إذن، أن نستعمل قانون الاحتمال الشامل.

$$P(A)=P(A\cap S)+P(A\cap L)$$

غير أن

$$P(A\cap S)=P(S)\times P(A/S)=0.6\times 0.7=0.42$$

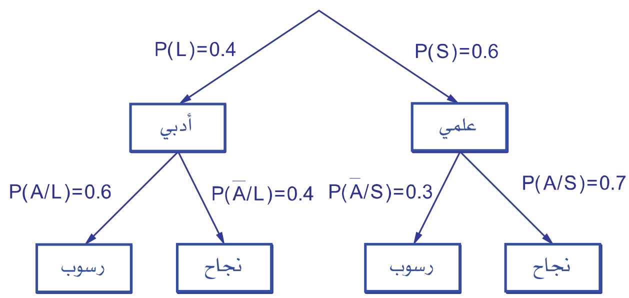
وَ

$$P(A\cap L)=P(L)\times P(A/L)=0.4\times 0.6=0.24$$

إذن

$$P(A)=P(A\cap S)+P(A\cap L)=0.42+0.24=0.66$$

يُمكن تمثيل المسألة باستعمال مخطَّط شجرة.



حـــاولْ 65% من طلاب ثانوية صلاح الدين من الصبيان والباقون من البنات. 80% من البنات يهوين المطالعة وَ 55% من الصبيان يهوون المطالعة. تم اختيار أحد المنتسبين إلى الثانوية عشوائيًّا. ما احتمال أن يكون من اختير (أو اختيرت) من هواة المطالعة؟ أنشئ مخطَّط شجرة لتمثيل المسألة.

التمـــــــاريـــــــن

التواصل في الرياضيات

1 أعطِ مثالاً على حدثَيْن مستقلَّيْن وآخر على حدثَيْن غير مستقلَّيْن.

2 كيف تجد احتمال تحقُّق حدثَيْن مستقلَّيْن معًا؟

3 أوضح الفرق بين حدثَيْن متنافيَيْن وحدثَيْن مستقلَّيْن.

تمارين موجّهة

4 A وَ B حدثان في تجربة عشوائية. $P(A)=\frac{3}{4}$ وَ $P(B)=\frac{1}{3}$ وَ $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$.
جِد $P(A/B)$. هل الحدثان مستقلاّن؟ وضِّح جوابك.

5 A وَ B حدثان مستقلاّن في تجربة عشوائية. $P(A)=0.2$ وَ $P(B)=0.3$. جِد

أ $P(A\cap B)$ ب $P(A\cup B)$ ج $P(\bar{A}\cap\bar{B})$ د $P(\bar{A}\cup\bar{B})$

تمارين وتطبيقات

6 A وَ B حدثان في تجربة عشوائية. $P(A)=\frac{3}{8}$ وَ $P(B)=\frac{1}{3}$ وَ $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$.
جِد $P(A/B)$ وَ $P(B/A)$.

7 رمى سعيد قطعة نقود معدنية ثلاث مرّات متتالية. جِد الاحتمال الاختباري $P(A/B)$
حيث: A : «ظهرت الكتابة أكثر ممّا ظهرت الصورة» وَ B : «ظهرت الكتابة في الرمية الأولى».

8 A وَ B حدثان في تجربة عشوائية. $P(A)=0.5$ وَ $P(B)=0.3$ وَ $P(A\cap B)=0.15$.
جِد $P(A/B)$. هل الحدثان مستقلاّن؟ وضِّح جوابك.

9 **صناعة** تملك شركة الفرات لإنتاج المصابيح الكهربائية 3 مصانع. يُنتِج الأول منها 40% من مجمل ما تُنتجه الشركة، ويُنتِج كل من المصنعَين الباقيَين 30% من مجمل الإنتاج. من ناحية أخرى، تبلغ نسبة المصابيح غير الصالحة 02% من إنتاج المصنع الأول وَ 15% من إنتاج المصنع الثاني وَ 01% من إنتاج المصنع الثالث. اختير مصباح عشوائيًا. ما احتمال أن يكون هذا المصباح غير صالح؟ وما احتمال أن يكون من إنتاج المصنع الثالث في حال كونه غير صالح؟

10 **رياضة** يلعب فريق السلام لكرة القدم 70% من مبارياته داخل العراق، والباقي خارجه. احتمال فوز الفريق في الداخل هو 0.6 وفي الخارج 0.5. سيلعب الفريق مباراة في الأسبوع القادم. ما احتمال فوزه؟ ما احتمال أن تكون المباراة داخلية في حال فوزه؟

11 يُتابع 150 معلّمًا دورات تدريبية في العلوم والرياضيات ويمارسون خلال فترة التدريب 3 أنواع من الأنشطة: حل التمارين، وإلقاء الدرس، وكتابة التقرير.

	حل التمارين	إلقاء الدرس	كتابة التقرير	المجموع
علوم	45	18	27	90
رياضيات	33	9	18	60
مجموع	78	27	45	150

أ هل الحدثان «يتابع دورة الرياضيات» و «يحلّ التمارين» مستقلاّن؟

ب هل الحدثان «يتابع دورة العلوم» و «يكتب التقرير» مستقلاّن؟

نظرة إلى الوراء

رمى دانا مكعَّبَيْ أعداد. ما احتمال أن يكون:

12 مجموع العددين الظاهرين 12؟

13 أحد العددَيْن الظاهرَيْن على الأقل فرديًّا؟

14 أحد العددَيْن الظاهرَيْن على الأقل أصغر من 3؟

نظرة إلى الأمام

15 يُبيّن الجدول أدناه درجات عدد من المرشَّحين لكلية الطب في مباراة الدخول. أكمل الجدول بإيجاد معدَّل درجات كل منهم، علمًا بأن تثقيل الدرجات في المباراة هو كما يلي:
الرياضيات: 3، العلوم: 4، اللغة الإنكليزية: 2، اللغة الكردية: 1.

الطالب	الرياضيات	العلوم	اللغة الإنكليزية	اللغة الكردية	المعدَّل
لارا	45	65	55	70	
لورا	75	70	50	60	
سعاد	80	65	55	40	

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 19

الدرس 3

النماذج الخطّية Linear Models

لماذا؟

يبدو في بعض الأحيان أن مجموعة من المعطيات هي تقريبًا قيم لدالّة خطّية. لو استطعت تحديد هذه الدالّة لكان بوسعك صياغة توقُّعات تتعلَّق بموضوع هذه المعطيات.

الأهداف

- يجد نموذجًا خطّيًّا لتمثيل مجموعة من المعطيات.
- يستعمل النماذج الخطّية للقيام بتوقُّعات.

المفردات Vocabulary

الانحدار	Regression
الارتباط	Correlation
معامل الارتباط	Correlation coefficient
المستقيم الأفضل تمثيلاً	Line of best fit

يُصدر صرصار الصنوبر صوته عبر حفّ جناحيه الواحد بالآخر. تزداد قوَّة هذا الصوت بتزايد سرعة حف الأجنحة. وقد لاحظ العلماء أن سرعة هذه الحركة تزداد بارتفاع درجات الحرارة مما يمكّن من تحديد درجة الحرارة بالاستماع إلى أصوات هذه الحشرات. يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن أصوات هذه الحشرات (بعدد الترددُّات في الثانية) التي تم تسجيلها عندما اتخذت درجة الحرارة 15 قيمة مختلفة.

عدد الترددُّات	20	16	20	18	17	16	15	17	15	16	15	17	16	17	14
درجة الحرارة	89	72	93	84	81	75	70	82	69	83	80	83	81	84	76

هل تستطيع تقدير درجة الحرارة إذا عرفت قوَّة صوت الحشرات (بعدد الترددُّات في الثانية)؟

التراجع Regression

يواجه الإنسان كثيرًا من المسائل التي تتناول متغيّرَيْن إحصائيَيْن يتأثر أحدهما بالآخر كما في المسألة السابقة. يُطلق الإحصائيون اسم **التراجع Regression** على دراسة مثل هذه العلاقة انطلاقًا من معطيات محدَّدة.

يستعمل الإحصائيون **النقاط البيانية Scatter Plot** لمحاولة فهم العلاقة بين متغيِّرَيْن واتِّجاهها ومدى قوَّتها. ويتم الحديث عن **الارتباط Correlation** للتعبير عن قوَّة العلاقة بين متغيّرَيْن واتِّجاهها.

ارتباط موجب، ميل موجب — ارتباط سالب، ميل سالب — لا ارتباط

يقيس الإحصائيون مدى تمثيل نموذج خطّي لمجموعة من المعطيات بواسطة عدد r يسمّونه **معامل الارتباط Correlation coefficient**.

اعلم واحفظ

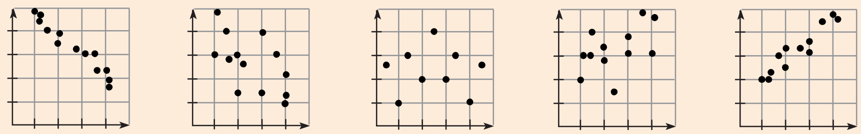
خصائص معامل الارتباط

معامل الارتباط Correlation Coefficient عدد يُحقِّق $-1 \le r \le 1$.

إذا كان $r=1$ ، فإن النقاط البيانية التي تمثِّل مجموعة المعطيات تُشكِّل مستقيمًا موجب الميل.

إذا كان $r=0$ ، فلا ترابط بين المتغيّرَيْن.

إذا كان $r=-1$ ، فإن النقاط البيانية التي تُمثِّل مجموعة المعطيات تُشكِّل مستقيمًا سالب الميل.



$r=-0.95$ $r=-0.6$ $r=0$ $r=0.6$ $r=0.95$

يستعمل الإحصائيون أنواعًا مختلفة من الدوال في محاولة وصف العلاقة بين متغيّرَيْن. إلا أنهم يولون اهتمامًا كبيرًا لاستعمال الدوال الخطّية في هذا المجال، خصوصًا إذا أظهرت النقاط البيانية ترابطًا قويًّا وبدت النقاط البيانية أقرب إلى أن تُشكِّل مستقيمًا. لذا سوف يقتصر هذا الدرس على **التراجع الخطّي Linear Regression**. إذا ارتبط متغيّران بعلاقة خطّية قوية، فأنت تستعمل **المستقيم الأفضل تمثيلاً Line of best fit** للتعبير عن العلاقة وإجراء توقُّعات.

هناك طرائق مختلفة لإيجاد المستقيم الأفضل تمثيلاً للعلاقة بين متغيّرَيْن إحصائيَّيْن:

1. **طريقة التربيعات الأقل Least Squares** هذه الطريقة هي الأكثر دقّة، لكنها تتطلَّب كمّية كبيرة من الحسابات أو استعمال التكنولوجيا.

2. **الطريقة البيانية Graphic Method** تقوم على إنشاء النقاط البيانية التي تمثِّل جدول المعطيات ورسم مستقيم بحيث يكون الأقرب إلى مجمل النقاط.

3. **طريقة مستقيم ماير Mayer Line** تقوم على قسمة المعطيات إلى قسمَيْن متساويَيْن تقريبًا وتحديد نقطتَيْن تمثِّل كل منهما قسمًا، ثم اعتماد المستقيم الذي يمرّ في هاتَيْن النقطتَيْن على أنه المستقيم الأفضل تمثيلاً.

4. **طريقة الوسيطات Median-Median** تقوم على تقسيم مجموعة المعطيات إلى ثلاثة أقسام وتحديد ثلاث نقاط تمثِّل كل منها قسمًا، ثم اعتماد المستقيم الذي يمر في النقطة الثانية ويوازي المستقيم المار في النقطتَيْن اللتَيْن تمثِّلان القسمَيْن الأوَّل والثالث.

سوف نتعلم في هذا الدرس الطريقة البيانية وطريقة مستقيم ماير وطريقة الوسيطات تخفيفًا لعبء القيام بحسابات معقَّدة. وعليك ألاّ تنسى أن نتائج هذه الطرائق هي نتائج تقريبية.

الطريقة البيانية Graphic Method

مثـــال 1

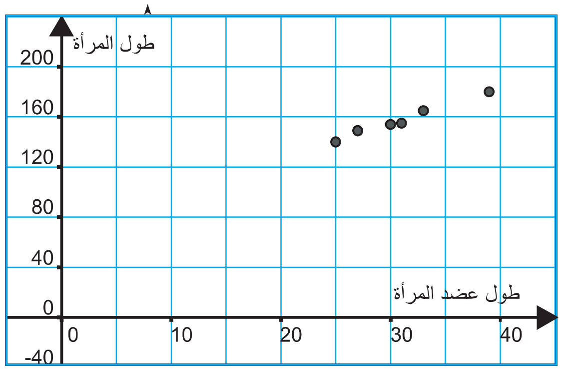
تطبيق على علم الأجناس البشرية

يستعمل عالم الأجناس البشرية طول عظم العضد، الذي يصل الكتف بالمرفق أو الكوع، لدى المرأة، ليُقدِّر طولها. يُظهر الجدول التالي بعض المعطيات عن أطوال عدد من النساء (بالسنتيمتر) وأطوال عظم العضد لديهن (بالسنتيمتر). أنشىء نقاطًا بيانية تمثِّل معطيات الجدول مستعملاً طول عظم العضد كمتغيّر حر، ثم جِد معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه المعطيات. كم سيكون طول امرأة طول عظم عضدها 37cm ؟

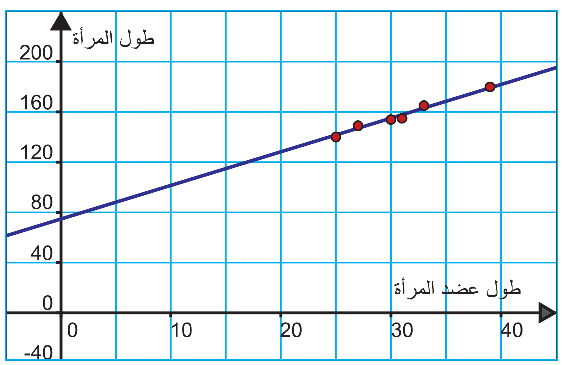
طول عظم العضد عند عدد من النساء								
طول عظم العضد	35	27	30	33	25	39	27	31
طول المرأة	167	149	154	165	140	180	149	155

الحل

الخطوة 1 إنشاء النقاط البيانية التي تمثِّل المعطيات.



الخطوة 2 رسم مستقيم يكون الأقرب إلى مجمل النقاط.



الخطوة 3 تعيين نقطتَيْن على هذا المستقيم.

اختر النقطتَيْن $(14, 110)$ وَ $(32, 160)$.

الخطوة 4 إيجاد معادلة المستقيم الذي يمر في هاتَيْن النقطتَيْن.

جِد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطتَيْن $(14, 110)$ وَ $(32, 160)$.

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-110=\frac{160-110}{32-14}(x-14)$$

$$y=2.78x+71.11$$

لكي تحسب القيمة المتوقَّعة لطول امرأة بلغ طول عظم عضدها 37 cm ، عوّض عن x بِـ 37 في معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً.

$y=2.78x+71.11$

$y=2.78\times37+7.11$

$y=173.97$

أي حوالي 174 cm

حاول **درّاجات** يُبين الجدول أدناه معطيات عن عدد الكيلومترات التي قطعها عدد من المتسابقين بدلالة الزمن (بالساعة) خلال مباراة لسباق الدرّاجات. جِد معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه المعطيات. كم سيقطع متسابق خلال زمن مقداره 11 ساعة؟

سباق الدرّاجات														
الزمن (بالساعة)	1	6	2	5	5	9	4	10	3	8	7	7	2	10
المسافة (بالكيلومتر)	9	45	20	71	57	98	56	104	36	75	60	71	31	97

مستقيم ماير Mayer St.line

مثـــــال 2

تطبيق على الأحوال الجوية

تقع مدينة أكرون، في أمريكا، ومدينة ولنكتون في نيوزيلاندا، على المسافة نفسها من خط الاستواء، الأولى في النصف الشمالي للكرة الأرضية والثانية في نصفها الجنوبي. يتضمّن الجدول أدناه متوسِّطات الدرجات العليا للحرارة في كل من المدينتَيْن على مدى 12 شهرًا. أنشىء نقاطًا بيانية لتمثِّل معطيات الجدول، كم سيكون متوسط درجات الحرارة في ولنكتون عندَما يكون هذا المتوسِّط 65 في أكرون؟

متوسطات الدرجات العليا للحرارة (على سلّم فهرنهايت)												
الشهر	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
أكرون	33	37	48	59	70	78	82	80	73	61	49	38
ولنكتون	67	67	65	62	56	53	51	52	55	57	60	64

الحل

الخطوة 1 أعد ترتيب المعطيات وفقًا للقيمَ المتصاعدة للمتغيِّر الحر.

أكرون	33	37	38	48	49	59	61	70	73	78	80	82
ولنكتون	67	67	64	65	60	62	57	56	55	53	52	51

الخطوة 2 اقسم هذا الجدول إلى جدولَيْن متساويَيْن في عدد الأعمدة.

أكرون	33	37	38	48	49	59		61	70	73	78	80	82
ولنكتون	67	67	64	65	60	62		57	56	55	53	52	51

الخطوة 3 جد x_1 ، متوسِّط قيم المتغيِّر الحر، وَ y_1 ، متوسِّط قيم المتغيِّر التابع، في القسم الأول من الجدول ثم جِد x_2 ، متوسِّط قيَم المتغيِّر الحر، وَ y_2 متوسِّط قيَم المتغيِّر التابع، في القسم الثاني من الجدول.

$$x_1=\frac{33+37+38+48+49+59}{6}=44 \quad \text{و} \quad y_1=\frac{67+67+64+65+60+62}{6}=64.16$$

$$x_2=\frac{61+70+73+78+80+82}{6}=74 \quad \text{و} \quad y_2=\frac{57+56+55+53+52+51}{6}=54$$

الخطوة 4 جد معادلة المستقيم الذي يمر في النقطتَيْن (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) .

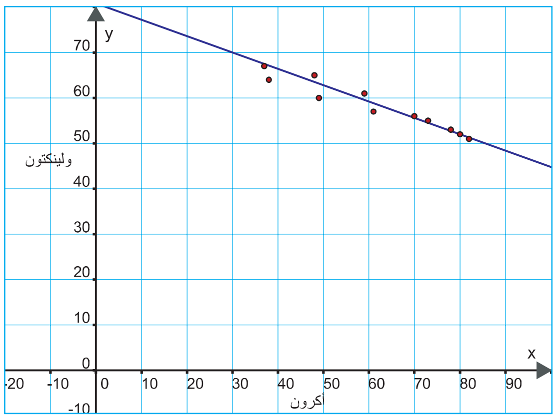
معادلة المستقيم الذي يمر في النقطتَيْن (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2).

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-64.16=\frac{54-64.16}{74-44}(x-44)$$

$$y=-0.34x+79.06$$

الخطوة 5 أنشئ النقاط البيانية والمستقيم الأكثر تمثيلاً.



إذا كان متوسِّط الدرجات العليا للحرارة في أكرون 65 درجة فمن المتوقَّع أن يكون هذا المتوسِّط في ولنكتون

$$y=-0.34x+79.06$$

$$y=-0.34\times 65+79.06$$

$$y=56.96$$

أي 57 درجة تقريبًا.

حـــاولْ **كرة سلّة** أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول، ابحث عن الترابط بين المتغيّرَيْن، أنشئ المستقيم الأفضل تمثيلاً وجِد معادلته، كم تتوقَّع أن يكون عدد النقاط خلالَ 25 دقيقة؟

عدد النقاط خلال فترة										
الزمن	28	35	8	20	39	23	19	27	15	30
النقاط	16	13	2	12	31	10	9	15	4	19

طريقة الوسيطات Median-Median

مثـــــال 3 **تطبيقات على التغذية**

يُظهر الجدول أدناه معطيات عن كمية الدهون التي تحتوي عليها أحد أنواع الشطائر وقيمتها الحرارية. جِد المستقيم الأفضل تمثيلاً. كم تتوقّع أن تكون القيمة الحرارية لشطيرة تحتوي على 17 غرامًا من الدهون؟

معطيات غذائية لبعض أنواع الشطائر								
كمية الدهون (بالغرام)	5	9	12	15	12	10	21	14
القيمة الحرارية (بالسعرة)	360	455	460	420	530	375	580	390

الحل

الخطوة 1 أعد كتابة الجدول بحيث تظهر المعطيات وفقًا للترتيب التصاعدي لقيم المتغيّر الحر وهو كمية الدهون في هذه المسألة.

معطيات غذائية لبعض أنواع الشطائر								
كمية الدهون (بالغرام)	5	9	10	12	12	14	15	21
القيمة الحرارية (بالسعرة)	360	375	455	460	530	390	420	580

الخطوة 2 اقسم هذا الجدول إلى ثلاثة أقسام يتساوى عدد الأعمدة في القسمين الأول والثالث ويكون عدد أعمدة الثاني قريبًا من العدد المشترك لأعمدة القسمَيْن الأول والثالث.

معطيات غذائية لبعض أنواع الشطائر										
كمية الدهون (بالغرام)	5	9	10		12	12		14	15	21
القيمة الحرارية (بالسعرة)	360	375	455		460	530		390	420	580

الخطوة 3 جد x_1 ، وسيط قيَم المتغيّر الحر، وَ y_1 ، وسيط قيَم المتغيّر التابع، في الجزء الأول، ثم جِد x_3 ، وسيط قيَم المتغيّر الحر، وَ y_3 ، وسيط قيَم المتغيّر التابع، في الجزء الثالث.
وسيط قيَم المتغيّر x للجزء الأول هو $x_1 = 9$ ووسيط قيَم المتغيّر y هو $y_1 = 375$ في حين أن وسيط قيَم المتغيّر x للجزء الثالث هو $x_3 = 15$ ووسيط قيَم المتغيّر y هو $y_3 = 420$.

الخطوة 4 جِد مَيل المستقيم الذي يمر في النقطتَيْن (x_1, y_1) وَ (x_3, y_3)
مَيل المستقيم d الذي يمر في النقطتَيْن (x_1, y_1) وَ (x_3, y_3) هو

$$m = \frac{420 - 375}{15 - 9} = 7.5$$

الخطوة 5 جِد x_2 متوسِّط قيَم المتغيّر الحر كلّها وَ y_2 متوسِّط قيَم المتغيّر التابع كلّها.

$$x_2 = \frac{5 + 9 + 12 + 15 + 12 + 10 + 21 + 14}{8} = 12.25$$

وَ

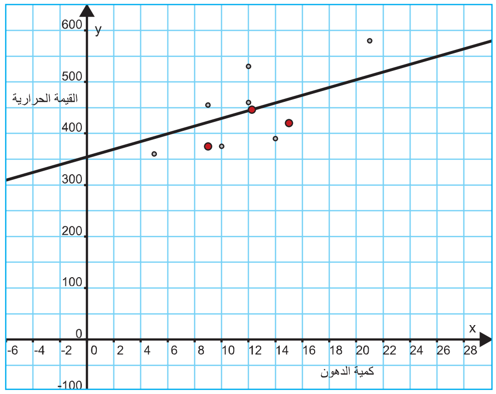
$$y_2 = \frac{360 + 455 + 460 + 420 + 530 + 375 + 580 + 390}{8} = 446.25$$

الخطوة 6 جِد معادلة المستقيم الذي يمر في (x_2, y_2) ومَيله m .

$$y - 446.25 = 7.5(x - 12.25) \quad \text{أو} \quad y = 7.5x + 354.375$$

تُشكِّل المعادلة التي حصلت عليها معادلة تقريبية للمستقيم الأفضل تمثيلاً لمجموعة المعطيات.

الخطوة 7 أنشىء نقاطًا بيانية تمثِّل معطيات الجدول. عيّن النقاط (x_1, y_1) وَ (x_2, y_2) وَ (x_3, y_3) . ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً.



القيمة الحرارية لشطيرة تحتوي على 17 غرامًا من الدهون هي

$$y = 7.5x + 354.375$$
$$y = 7.5 \times 17 + 354.375$$
$$y = 481.875$$

أي 782 سعرة حرارية تقريبًا.

حـــاولْ يُبين الجدول معطيات عن سيارات اختيرت عشوائيًّا وتتناول المسافة التي تقطعها سيارة باستهلاك لتر من الوقود وفقًا لقوَّتها (بالأحصنة).

قوَّة السيارات وما تقطعه بكل لتر										
القوة	175	255	140	165	115	120	190	180	110	125
المسافة بكل لتر (km/l)	3.61	2.13	4.1	2.95	5.25	4.6	2.46	3.45	5.75	4.95

أنشئَ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً قوَّة السيارة كمتغيّر حر، ثم جِد معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لهذه المعطيات. كم ستكون المسافة التي ستقطعها سيارة قوَّتها 210 أحصنة؟

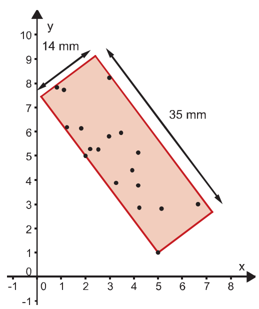
معامل الارتباط Coefficient of Correlation

يحتاج حساب معامل الارتباط r إلى القيام بحسابات معقَّدة أو إلى استعمال التكنولوجيا. لكن يمكن إيجاد قيمة تقريبية لهذا المعامل بيانيًّا.

لإيجاد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط لنقاط بيانية، ارسم أصغر مستطيل يضم جميع هذه النقاط، وجِد قياس ضلعه الأطول L وقياس ضلعه الأقصر ℓ. القيمة التقريبية لمعامل الارتباط هي $r \approx \pm\left(1-\frac{\ell}{L}\right)$ وإشارته هي إشارة الترابط أي − إذا كان الارتباط سالبًا، وَ + إذا كان موجبًا.

مثـــال 4

جِد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط للنقاط البيانية المقابلة.

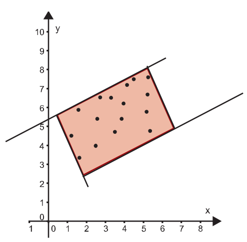


الحل

$\ell = 14$ وَ $L = 35$ والترابط سالب. إذًا

$$r \approx -\left(1-\frac{\ell}{L}\right) = -\left(1-\frac{14}{35}\right) = -0.6$$

حـــاولْ جِد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط للنقاط البيانية أدناه.



التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1 معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً لمجموعة معطيات هي $y = 3.2x - 12.5$. هل الترابط بين المتغيّرَيْن الإحصائيَّيْن موجب أم سالب؟

2 معامل الارتباط لمتغيّرَيْن إحصائيَّيْن هو $r_1 = 0.65$ ومعامل الارتباط لمتغيّرَيْن آخرَيْن هو $r_2 = -0.75$. أي المعاملَيْن يُعبِّر عن ترابط أقوى.

3 هل تستطيع إعطاء قيمة تقريبية لمعامل الارتباط إذا لم تُظهر النقاط البيانية أي ترابط بين المتغيّرَيْن؟ وضّح جوابك.

تمارين موجّهة

4 **سيارات** أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً عدد الغالونات كمتغيّر حر. ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً وجِد معادلته. هل يبدو الارتباط قويًّا.

المسافة المقطوعة (km)							
عدد الغالونات	11.2	9.8	10.6	10.1	12.3	8.7	10.1
المسافة المقطوعة	338	296	332	324	368	263	305

5 **اقتصاد** يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن متوسِّط درجة الحرارة خلال سبعة أشهر، وعن قيمة فاتورة التبريد (بآلاف الدنانير) في منزل جواد.

فاتورة التبريد في منزل جواد							
متوسّط درجة الحرارة	38	42	44	36	42	49	38
الفاتورة	93	79	75	83	74	67	86

أ أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً متوسِّط درجات الحرارة كمتغيّر حر.

ب جِد معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً باستعمال الرسم البياني. ارسم هذا المستقيم.

ج هل الارتباط بين المتغيّرَيْن موجب أم سالب؟ هل الارتباط بينَهما قويّ أم ضعيف؟

د قدّر فاتورة التبريد لشهر متوسِّط درجات الحرارة فيه 40 درجة . ما دقّة هذ التقدير؟

6 **مدارس** يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن عدد المعلّمين وعدد الطلاّب في عيّنة عشوائية من المدارس.

عدد المعلّمين وعدد الطلاّب								
عدد المعلّمين	92	52	114	49	110	62	76	84
عدد الطلاب	1050	653	753	381	1312	813	796	910

أ أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل المعطيات مستعملاً عدد المعلّمين كمتغيِّر حر.

ب جِد، باستعمال طريقة ماير، معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم.

ج قدّر عدد المعلّمين في مدرسة تضمّ 600 طالب. ما دقّة هذا التقدير؟

GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 26

تمارين وتطبيقات

7 **تسعير البطاقات** دوّن مدير إحدى الفرق الموسيقية أسعار بطاقات الدخول إلى حفلات الفرقة وعدد الحضور.

الحضور وفقًا لأسعار بطاقات الدخول (بآلاف الدنانير)									
السعر	6	5	8.5	8	10	5.5	7	7.5	8
الحضور	213	256	155	194	160	267	258	210	235

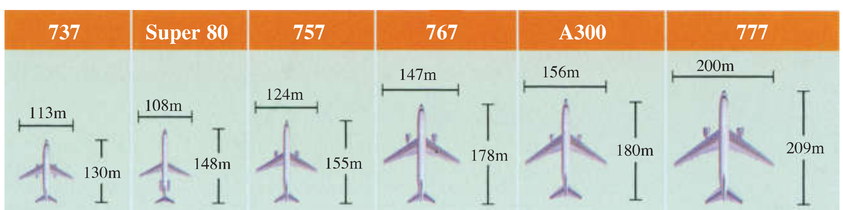
أ أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً السعر كمتغيّر حر.

ب هل الارتباط بين المتغيّرين موجب أم سالب؟ هل الارتباط بينهما قوي أم ضعيف؟

ج جِد، باستعمال الرسم البياني، معادلة المستقيم الأفضل تمثيلاً. ارسم هذا المستقيم. جِد قيمة معامل الارتباط إذا توفرت لك حاسبة بيانية.

د قدّر عدد الحضور في حفل ثمن بطاقة الدخول إليه 9 آلاف دينار. ما دقة هذا التقدير؟

8 **طيران** يُبيِّن الجدول أدناه أطوال عدد من الطائرات وعرض جناحَيها. أنشئ نقاطًا بيانية لتمثيل معطيات الجدول مستعملاً الطول كمتغيّر حر. ارسم المستقيم الأفضل تمثيلاً وجِد معادلته.

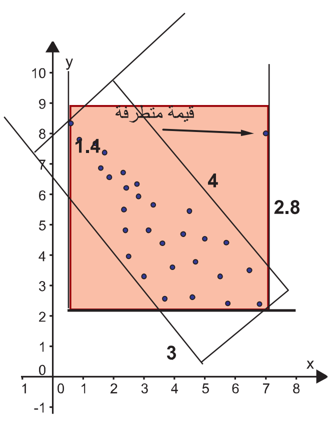


9 يُبيِّن الرسم المقابل النقاط البيانية للعلاقة بين عمر طالب في المرحلة الابتدائية والزمن الذي يستغرقه ربط شريط حذائه.

أ جِد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط.

ب تتضمَّن هذه النقاط قيمة متطرِّفة. جِد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط بعد حذف هذه النقطة المتطرِّفة.

ج كيف تشرح تأثير وجود هذه النقطة المتطرِّفة على قوَّة الارتباط.



GRADE12-CHAP-1-Adabi(2)-13 2/12/15 1:05 PM Page 29

10 يُظهر الجدول أدناه معطيات عن أعضاء فريق لاعبي الكرة الطائرة تتناول طول كل منهم بالسنتيمتر، وطول القدم اليمنى بالسنتيمتر.

الطول وطول القدم اليمنى												
طول القدم	27.5	26.5	25.0	31.0	28.5	28.0	29.5	28.0	27.5	26	24.5	29.0
الطول	178	179	172	186	181	180	185	183	179	172	170	181

أ أنشئ نقاطًا بيانية تمثِّل معطيات الجدول.

ب استعمل طريقة ماير لإيجاد معادلة تقريبية للمستقيم الأفضل تمثيلاً.

ج جِد قيمة تقريبية لمعامل الارتباط.

نظرة إلى الوراء

11 يُبيّن الجدول أدناه معطيات عن أعداد طلاب الصف 12 الذين يشكون من الحساسية في فصل الربيع.

	يشكون الحساسية	لا يشكون الحساسية	المجموع
ذكور	12	7	19
إناث	9	8	17
المجموع	21	15	36

أ تم اختيار طالب عشوائيًا. ما احتمال ألاّ يشكو الطالب من الحساسية، علمًا بأنه ذكر؟

ب هل الحدثان «الطالب أنثى» وَ « يشكو من الحساسية» مستقلان؟

نظرة إلى الأمام

حُل كل نظام خطّي.

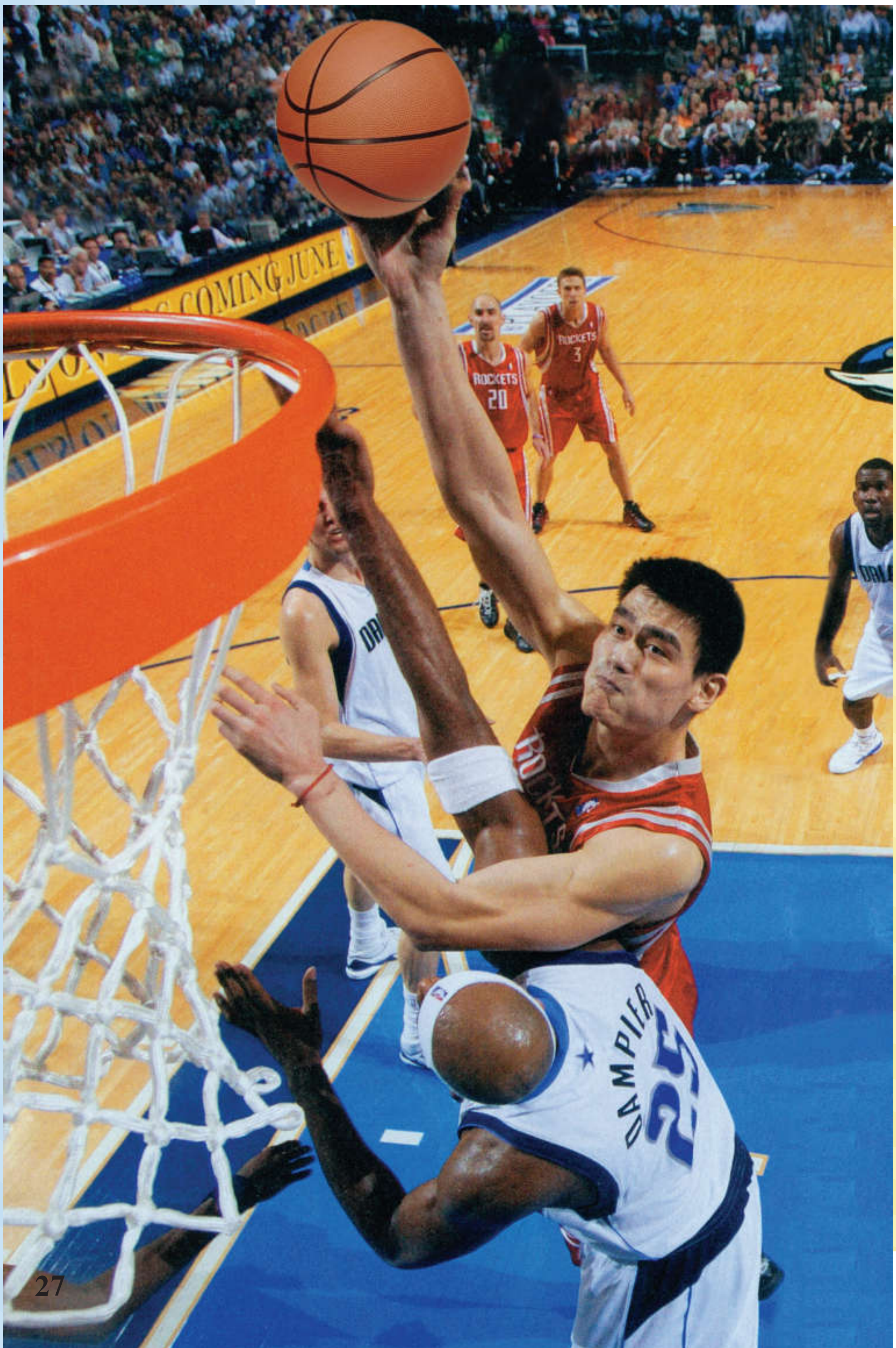
12 $\begin{cases} 3x-2y=-1 \\ 2x+5y=12 \end{cases}$

13 $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x+5y=-2 \end{cases}$

GRADE12-CHAP-2-Adabi(2)-13 2/12/15 1:09 PM Page 3

الفصل 2

الجبر
Algebra



الدروس

حل الأنظمة الخطّية بثلاثة مجاهيل

Solving Linear systems in 3 unknowns

الأهداف

- يحل جبريًّا نظامًا خطّيًّا بثلاثة مجاهيل.

لماذا؟ يُمكنك استعمال نظام من 3 معادلات خطّية بثلاثة مجاهيل لحل الكثير من مسائل الحياة، كإيجاد نظام تثقيل الدرجات في مسابقة الدخول إلى كلية الهندسة (مثال 2)

تعلّمت في الصفوف السابقة أن تحلّ نظامًا خطّيًّا من معادلتَين خطّيَّتَين بمجهولين، أو نظامًا خطّيًّا 2×2. غالبًا ما تُسمّى الأنظمة الخطّيَّة من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل، الأنظمة 3×3. لكي تجد حلاًّ وحيدًا لنظام معادلات خطّية، يجب عمومًا أن يكون عدد المعادلات مساويًا لعدد المجاهيل.

لكي تحل نظامًا 3×3، حوِّله إلى نظام 2×2، ثم استعمل طرائق حل الأنظمة 2×2 التي تعلمتها في الصف الحادي عشر.

مثال 1 **حل نظام خطّي من 3 معادلات بثلاثة مجاهيل**

استعمل الحذف لحل النظام الخطّي التالي:

$$\begin{cases} x+2y-3z=-2 & (1) \\ 2x-2y+z=7 & (2) \\ x+y+2z=-4 & (3) \end{cases}$$

الخطوة 1 احذف أحد المجاهيل الثلاثة.

يبدو المجهول y مرشَّحًا طبيعيًّا للحذف، لأنّ معاملَيْه في المعادلتين (1) وَ (2) متعاكسان.

$$\begin{array}{lr} (1) & x+2y-3z=-2 \\ (2) & 2x-2y+z=7 \\ \hline (4) & 3x\qquad -2z=5 \end{array}$$

اجمع المعادلتين (1) وَ (2)

استعمل المعادلتين ❶ وَ ❸ لإيجاد معادلة ثانية بالمجهولَين x وَ z.

$$\begin{array}{ll} ❶ & x+2y-3z=-2 \\ ❷ & -2(x+y+2z=-4) \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} x+2y-3z=-2 \\ -2x-2y-4z=8 \\ \hline -x-7z=6 \quad ❺ \end{array}$$

اضرب المعادلة ❸ في -2 واجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة ❶ .

لديك الآن نظام خطّي 2×2:

$$\begin{cases} 3x-2z=5 & ❹ \\ -x-7z=6 & ❺ \end{cases}$$

حلّه باستعمال الحذف.

الخطوة 2 احذف مجهولاً ثانيًا، وحُل المعادلة الناتجة لتحصل على قيمة المجهول الثالث. احذف المجهول x.

$$\begin{array}{ll} ❹ & 3x-2z=5 \\ ❺ & 3(-x-7z=6) \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 3x-2z=5 \\ -3x-21z=18 \\ \hline -23z=23 \\ z=-1 \end{array}$$

اضرب المعادلة ❺ في 3، واجمع المعادلة الناتجة مع المعادلة ❹ .

الخطوة 3 استعمل إحدى معادلتَي النظام 2×2 لتحسب قيمة x.

$$\begin{array}{ll} ❶ & -x-7z=6 \\ ❷ & -x-7(-1)=6 \\ & x=1 \end{array}$$

عوّض عن z بقيمته -1 .

الخطوة 4 عوّض عن x وَ z بقيمتَيْهما في إحدى معادلات النظام الأصلي لتحسب قيمة y.

$$\begin{array}{ll} ❶ & x+y+2z=-4 \\ ❷ & (1)+y+2(-1)=-4 \\ & y=-3 \end{array}$$

عوّض.

حل النظام هو $(1, -3, -1)$

حـــاولْ **استعمل الحذف لحل النظام التالي:**

$$\begin{cases} -x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=1 \\ -3x-4y+z=4 \end{cases}$$

يُمكنك أيضًا استعمال التعويض لحل نظام خطّي 3×3 . هنا أيضًا، تقضي الفكرة بتحويل النظام 3×3 إلى نظام 2×2 .

مثـــــال 2 تطبيق على مسابقات الدخول

يخضع الراغبون في الدخول إلى كلية الهندسة لمسابقة في 3 مواد هي الرياضيات والعلوم واللغة الإنكليزية. لحساب مجاميع المرشَّحين، تعمد اللجنة الفاحصة إلى تثقيل درجة المتسابق في كل مادة بثقل (عدد تُضرب فيه الدرجة) قد يختلف عن ثقل درجته في المادتين الباقيتين.

المرشَّح	رياضيات	علوم	لغة إنكليزية	المجموع
سوزان	90	60	70	700
آزاد	60	70	80	590
هشيار	0	60	60	240

يُبيّن الجدول المقابل درجات 3 مرشَّحين في المواد الثلاث، ومجموع كل منهم بعد التثقيل.

استعمل معطيات الجدول لتجد ثقل كل مادة.

الخطوة 1 ارمز بالمتغيّر x إلى ثقل مادة الرياضيات، وبالمتغيّر y إلى ثقل مادة العلوم، وبالمتغيّر z إلى ثقل مادة اللغة الإنكليزية. اكتب نظام معادلات يُعبِّر عن معطيات الجدول.

$$\begin{cases} 90x+60y+70z=700 & (1) \\ 60x+70y+80z=590 & (2) \\ 60y+60z=240 & (3) \end{cases}$$

(1) درجات سوزان.
(2) درجات آزار.
(3) درجات هشيار.

لاحظ أنّ المتغيّر x غير ظاهر في المعادلة الثالثة، لأنّ هشيار نال 0 في الرياضيات. غياب متغيّر في معادلة لا يبدِّل في الأمر شيئًا. إذا نظرت إلى المعادلة الثالثة، تلاحظ أنها تسمح بحساب y بدلالة z. هذا الأمر يساعد على استعمال التعويض لتحويل النظام إلى نظام خطّي من معادلتَيْن بمجهولَيْن.

الخطوة 2 احسب المتغيّر y بدلالة المتغيّر z باستعمال المعادلة (3).

$$60y+60z=240$$
$$y=4-z$$

احسب y بدلالة المتغيّر z.

الخطوة 3 عوّض عن y بقيمته في كل من المعادلتين (1) وَ (2).

$$\begin{cases} 90x+60(4-z)+70z=700 \\ 60x+70(4-z)+80z=590 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 90x+10z=460 & (4) \\ 60x+10z=310 & (5) \end{cases}$$

عوّض ثم بسّط

الخطوة 4 استعمل الحذف لحل النظام الذي حصلت عليه، اطرح المعادلة (5) من المعادلة (4).

$$90x+10z=460 \quad (4)$$
$$60x+10z=310 \quad (5)$$
$$30x \quad =150 \quad (6)$$

الخطوة 5 حل المعادلة التي حصلت عليها.

$$30x=150$$
$$x=5$$

الخطوة 6 عوّض عن x بقيمته في المعادلة (4) لحساب قيمة z.

$$90(5)+10z=460$$
$$10z=10$$
$$z=1$$

الخطوة 7 عوّض عن كل من x وَ z بقيمته في المعادلة (1) واحسب قيمة y.

$$90(5)+60y+70(1)=700$$
$$60y=180$$
$$y=3$$

الحل هو $x=5$، $y=3$، $z=1$. ثقل درجة الرياضيات 5 ودرجة العلوم 3 ودرجة اللغة الإنكليزية 1.

حـــاولْ حدِّد تثقيل كل مادة في مسابقة الدخول إلى كلية الطب وفقًا لمعطيات الجدول أدناه.

المرشَّح	رياضيات	علوم	لغة إنكليزية	المجموع
شيرين	80	70	50	430
سولاف	70	80	0	370
سانا	90	70	80	490

كما استعملت النظر أفقيًّا لتجد عدد أعمدة المصفوفة A وعموديًّا لتجد عدد صفوف المصفوفة B بغية تقرير إن كان ناتج الضرب AB معرّفًا، فإنك ستقوم بالأمر نفسه لحساب عناصر المصفوفة ناتج الضرب.

بالكلمات	عدديًا	جبريًا
لحساب العنصر P_{kj} في المصفوفة $P=AB$ ، اضرب كل عنصر في الصف k من المصفوفة A في العنصر الذي يقابله في العمود j من المصفوفة B، ثم اجمع نواتج الضرب هذه.	$P=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\7 & 8\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}1\times5+2\times7 & 1\times6+2\times8\\3\times5+4\times7 & 3\times6+4\times8\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\b_1 & b_2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}c_1 & c_2\\d_1 & d_2\end{bmatrix}=$ $\begin{bmatrix}a_1c_1+a_2d_1 & a_1c_2+a_2d_2\\b_1c_1+b_2d_1 & b_1c_2+b_2d_2\end{bmatrix}$

مثال 2

ضرب المصفوفات

استعمل المصفوفات $A=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}$ $B=\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}$ $D=\begin{bmatrix}11 & -1\\12 & 10\end{bmatrix}$

احسب ناتج الضرب إن كان مُعرّفًا.

أ AB

تفحَّص الرُّتب لكي تقرِّر إن كان ناتج الضرب معرَّفًا. رتبة المصفوفة A هي 2×3 ، ورتبة المصفوفة B هي 3×2 . الناتج AB معرَّف، وسوف يكون مصفوفة من الرتبة 2×2 .

اضرب الصف 1 من المصفوفة A في العمود 1 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{11} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & ?\\? & ?\end{bmatrix} \leftarrow 0(5)+4(-2)+9(6)$$

اضرب الآن الصف 1 من المصفوفة A في العمود 2 من المصفوفة B، كما هو مُبيَّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{12} في المصفوفة ناتج الضرب C .

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\? & ?\end{bmatrix} \leftarrow 0(1)+4(7)+9(0)$$

اضرب الصف 2 من المصفوفة A في العمود 1 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{21} في المصفوفة ناتج الضرب C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\-9 & ?\end{bmatrix} \leftarrow (-3)(5)+3(-2)+2(6)$$

اضرب الصف 2 من المصفوفة A في العمود 2 من المصفوفة B، كما هو مُبيّن أدناه، واكتب الناتج مكان العنصر C_{22} في المصفوفة ناتج الضرب C.

$$C=AB=\begin{bmatrix}0 & 4 & 9\\-3 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 1\\-2 & 7\\6 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}46 & 28\\-9 & 18\end{bmatrix} \leftarrow (-3)(1)+3(7)+2(0)$$

إذن $C=AB=\begin{bmatrix}46 & 28\\-9 & 18\end{bmatrix}$

انتبــه!

لاحظ أن ناتجَي الضرب AB و BA يختلفان عادة. لا يتمتع ضرب المصفوفات بخاصيّة التبديل.

ب BA

تفحّص الرُّتب لكي تقرِّر إن كان ناتج الضرب معرَّفًا.

رتبة المصفوفة B هي 3×2 ورتبة المصفوفة A هي 2×3. الناتج BA معرَّف وهو مصفوفة من الرتبة 3×3.

$$BA=\begin{bmatrix}5(0)+1(-3) & 5(4)+1(3) & 5(9)+1(2)\\ -2(0)+7(-3) & -2(4)+7(3) & -2(9)+7(2)\\ 6(0)+0(-3) & 6(4)+0(3) & 6(9)+0(2)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 23 & 47\\ -21 & 13 & -4\\ 0 & 24 & 54\end{bmatrix}$$

ج AD

تفحّص الرتب لكي تقرِّر إن كان ناتج الضرب معرَّفًا.

رتبة المصفوفة A هي 2×3، ورتبة المصفوفة D هي 2×2. الناتج AD غير معرَّف.

حــاولْ **2. احسب ناتج الضرب إن كان ذلك ممكنًا.**

أ BD **ب** DA

تُستعمل المصفوفات في إدارة الأعمال لحساب المداخيل والكلف والأرباح.

مثــــال **3** **تطبيق على إجراء الجردة**

تبيع الشركة المتحدة للتجهيزات الرياضية نوعَيْن من المزالج في مخزنَيْن. يُبيّن الجدول الأول موجودات المخزنَيْن من كل نوع، والجدول الثاني أسعار المبيع والكلفة والربح لكل وحدة من وحدات كل نوع. جِد الكلفة الكلّية للنوعَيْن في كل مخزن.

موجودات المخزنَيْن		
	عادي	ممتاز
المخزن 1	14	10
المخزن 2	7	8

المداخيل والكلف والأرباح بآلاف الدنانير			
	السعر	الكلفة	الربح
عادي	89	44	45
ممتاز	119	58	61

استعمل ضرب المصفوفات لإيجاد المداخيل والكلف والأرباح لكل مخزن.

$$\begin{bmatrix}14 & 10\\ 7 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}89 & 44 & 45\\ 119 & 58 & 61\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}14(89)+10(119) & 14(44)+10(58) & 14(45)+10(61)\\ 7(89)+8(119) & 7(44)+8(58) & 7(45)+8(61)\end{bmatrix}$$

مداخيل كلف أرباح

$$=\begin{bmatrix}2436 & 1196 & 1240\\ 1575 & 772 & 803\end{bmatrix}\begin{matrix}\text{المخزن 1}\\ \text{المخزن 2}\end{matrix}$$

كلفة المزالج في المخزن 1 هي 1196 ألف دينار وَ 772 ألف دينار في المخزن 2.

حــاولْ **3.** بدِّل موجودات المخزن 2 بحيث تصبح 6 من النوع العادي وَ 9 من النوع الممتاز. احسب المصفوفة ناتج الضرب من جديد وحدِّد أرباح المخزن 2.

المصفوفة المربَّعة Square matrix هي مصفوفة لها العدد نفسه من الأعمدة والصفوف. إنها مصفوفة من الرتبة $m\times m$. **القطر الرئيس Main diagonal** في مصفوفة مربَّعة هو القطر الذي يصل الزاوية العليا إلى اليسار بالزاوية السفلى إلى اليمين.

مصفوفة الوحدة Unit matrix هي مصفوفة مربَّعة جميع عناصرها أصفار باستثناء تلك الواقعة على القطر الرئيس حيث أنها تساوي 1. هناك مصفوفة وحدة واحدة لكل رتبة $n\times n$ من رتب المصفوفات المربعة.

مصفوفة الوحدة للرتبة 2×2 هي $I_2=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ وللرتبة 3×3 هي $I_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

في ضرب المصفوفات، تؤدّي مصفوفة الوحدة من رتبة معيَّنة في ضرب المصفوفات دور العدد 1 في ضرب الأعداد. إذا كانت A مصفوفة مربَّعة من الرتبة $m\times m$ ، فإن $AI_m=I_mA=A$.

فإذا كانت $A=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}$ ، فإن:

$$AI_2=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\times1+7\times0&5\times0+7\times1\\-1\times1+4\times0&-1\times0+4\times1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=A$$

وَ

$$I_2A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times5+0\times(-1)&1\times7+0\times4\\0\times5+1\times(-1)&0\times7+1\times4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5&7\\-1&4\end{bmatrix}=A$$

بما أن من الممكن ضرب مصفوفة مربَّعة في نفسها، فيمكن إجراء ذلك تكرارًا، والحصول على قوَّة هذه المصفوفة.

مثـــال 4 قوى المصفوفات المربَّعة

$$A=\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}\quad I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

احسب إن كان ذلك ممكنًا.

أ A^2

$$A^2=\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}7&3\\-2&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\times7+3(-2)&7\times3+3\times0\\-2\times7+0\times(-2)&-2\times3+0\times0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43&21\\-14&-6\end{bmatrix}$$

ب B^2

$$B^2=\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&4&1\\5&0&-2\\1&-1&3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times2+4\times5+1\times1&2\times4+4\times0+1(-1)&2\times1+4(-2)+1\times3\\5\times2+0\times5+(-2)\times1&5\times4+0\times0+(-2)(-1)&5\times1+0(-2)+(-2)\times3\\1\times2+(-1)\times5+3\times1&1\times4+(-1)\times0+3(-1)&1\times1+(-1)(-2)+3\times3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}25&7&-3\\8&22&-1\\0&1&12\end{bmatrix}$$

حـــاولْ **4. احسب المصفوفة إن كان ذلك ممكنًا.**

أ C^2 ب A^3 ج B^3 د I^4

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1 ما الشرط الذي ينبغي أن تحققه المصفوفتان A وَ B لكي يكون ممكنًا إيجاد AB؟

2 اشرح الخطوات التي تقوم بها لكي تضرب المصفوفة $\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ في المصفوفة $\begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

تمارين موجّهة

اذكر إن كان ناتج الضرب معرّفًا، وأعطِ رتبته إن كان كذلك.

3 $A_{4\times5}B_{5\times3}$ **4** $B_{5\times3}A_{4\times5}$ **5** $C_{9\times5}D_{5\times9}$

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 6 إلى 8. احسب ناتج الضرب إن كان ذلك ممكنًا.

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ D=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 7 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 5 \end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6 BA **7** CA **8** DC **9** BI

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 10 إلى 12. احسب كل قوة، إن كان ذلك ممكنًا.

$$C=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

10 A^2 **11** A^3 **12** C^2

تمارين وتطبيقات

اذكر إن كان ناتج الضرب معرّفًا، وأعطِ رتبته إن كان كذلك.

13 $A_{2\times1}B_{2\times3}$ **14** $B_{2\times3}A_{2\times1}$ **15** $C_{3\times5}D_{5\times1}$

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 16 إلى 19. احسب ناتج الضرب، إن كان ذلك ممكنًا.

$$A=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix} -2 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix},\ I=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16 AB **17** CA **18** BA **19** CI

استعمل المصفوفات التالية لحل التمارين من 20 إلى 23. اكتب الجواب على أبسط صورة، إن كان ذلك ممكنًا.

$$Q=\begin{bmatrix}4 & 13 & -9\end{bmatrix}\quad S=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{bmatrix}\quad T=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\quad A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ -1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix}\quad B=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & 3 & 5\end{bmatrix}\quad C=\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

20 S^2 **21** B^2 **22** S^3 **23** Q^3

24 جِد قيمة x بحيث تصحّ المساواة المصفوفية. $\begin{bmatrix}4 & 3\\ 5 & 6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6 & \frac{x}{2}\\ -1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}21 & -19\\ 24 & -26\end{bmatrix}$

نظرة إلى الوراء

احسب كل مقدار إن كان ذلك ممكنًا، حيث

$S=\begin{bmatrix}2 & 4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$ وَ $T=\begin{bmatrix}0.5 & 0.83\\ 5 & 0\end{bmatrix}$ وَ $V=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ -4 & 1 & -1\end{bmatrix}$.

25 $S+T$ **26** $V-T$ **27** $4T$

نظرة إلى الأمام

28 جِد محدِّد المصفوفة $A=\begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 2\end{bmatrix}$. هل بوسعك أن تجد مصفوفة $B=\begin{bmatrix}a & b\\ b & d\end{bmatrix}$ تُحقِّق $AB=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$؟ وضِّح جوابك.

الدرس 4

مقلوب المصفوفة Inverse of a matrix

لماذا؟
يستعمل العاملون في تركيب الشيفرات وفكها المصفوفات للحفاظ على سريّة الرسائل.

الأهداف
- يُقرِّر إن كان لمصفوفة مقلوب أم لا.
- يجد مقلوب مصفوفة 2×2 في حال وجوده.
- يحل نظام معادلات خطّية باستعمال مقلوب المصفوفة.

المفردات Vocabulary
- مقلوب المصفوفة Inverse of a matrix
- المعادلة المصفوفية Matrix equation
- مصفوفة المجاهيل Variable matrix
- مصفوفة الثوابت Constant matrix

تستطيع تشفير رسالة باستعمال المصفوفات. يستعمل من تصل إليه الرسالة عملية معاكسة، لفك الشيفرة وقراءة الرسالة.

لكي يكون لمصفوفة مقلوب، يجب أن تكون مربَّعة. غير أن هذا الشرط غير كافٍ، لأن هناك مصفوفات مربَّعة لا مقلوب لها. إذا كان ناتج ضرب المصفوفة A في المصفوفة B يساوي مصفوفة الوحدة I، فإن $AB=BA=I$. في هذه الحالة، تُسمّى المصفوفة B **مقلوب المصفوفة** A **Inverse of a matrix**، ويُشار إليها بالرمز A^{-1}.

مثال 1 تحديد إن كانت مصفوفة مقلوب مصفوفة أخرى.

حدِّد إن كانت المصفوفة B مقلوب المصفوفة A.

أ) $A=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}$

$$AB=\begin{bmatrix}2&0&1\\4&1&2\\2&0&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&0&-\frac{1}{6}\\-2&1&0\\-\frac{1}{3}&0&\frac{1}{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

بما أن ناتج الضرب هو مصفوفة الوحدة، فإن المصفوفة B هي مقلوب المصفوفة A.

ب) $A=\begin{bmatrix}2&3\\7&10\end{bmatrix}$ ؛ $B=\begin{bmatrix}-10&6\\7&-4\end{bmatrix}$

تذكَّر
مصفوفة الوحدة من الرتبة n هي المصفوفة المربَّعة من الرتبة n التي تساوي جميع عناصرها 0 باستثناء عناصر القطر الرئيس التي تساوي جميعها 1. فمصفوفة الوحدة من الرتبة 3 هي:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$AB=\begin{bmatrix}2 & 3\\7 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 6\\7 & -4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 2\end{bmatrix}$$

بالاستناد إلى ما سبق، فإن المصفوفة B ليست مقلوب المصفوفة A .

حـــاولْ **حدِّد إن كانت المصفوفة B مقلوب المصفوفة A .**

$$B=\begin{bmatrix}-0.2 & 0 & 0.4\\1.2 & 1 & -1.4\\0.4 & 0 & 0.2\end{bmatrix}\text{ ، } A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\4 & 1 & -1\\2 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

مقلوب مصفوفة مربَّعة من الرتبة 2

إذا كان محدِّد المصفوفة $M=\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ مختلفًا عن الصفر، فإن لهذه المصفوفة مقلوبًا هو $M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$

لا مقلوب لمصفوفة محدِّدها يساوي الصفر.

مثـــال

إضـاءة

للحصول على المصفوفة $\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}$ من المصفوفة $\begin{bmatrix}a & b\\c & d\end{bmatrix}$ بادل بين العنصرَيْن a و d واستبدل بكل من العنصرَيْن الآخرين معكوسه.

2 إيجاد مقلوب مصفوفة مربَّعة من الرتبة الثانية

جِد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

أ $\mathbf{M}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\3 & -4\end{bmatrix}$

ابدأ بحساب محدِّد المصفوفة.

$$|M|=\begin{vmatrix}-2 & 2\\3 & -4\end{vmatrix}=(-2)(-4)-2\times 3=2\neq 0$$

بما أن محدِّد المصفوفة مختلف عن الصفر، فإن لها مقلوبًا هو:

$$M^{-1}=\frac{1}{|M|}\begin{bmatrix}d & -b\\-c & a\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-4 & -2\\-3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -1\\\frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}$$

ب $\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 2\\3 & 12\end{bmatrix}$

ابدأ بحساب محدِّد المصفوفة.

$$|A|=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & 2\\3 & 12\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\times 12-2\times 3=0$$

بما أن محدِّد المصفوفة يساوي الصفر، فليس للمصفوفة مقلوب.

حـــاولْ جِد مقلوب المصفوفة $C=\begin{bmatrix}3 & 2\\3 & -2\end{bmatrix}$.

تستطيع استعمال المصفوفات لحل نظام معادلات خطّية. باستعمال المصفوفات تحوّل حل نظام المعادلات إلى عملية شبيهة بحل معادلة خطّية مثل $5x=20$، عن طريق ضرب كل من طرفي المعادلة في مقلوب العامل 5، أي $\frac{1}{5}$.

للقيام بذلك، تُحوِّل نظام المعادلات إلى **معادلة مصفوفية** $AX=B$ **Matrix equation** ، حيث يرمز A إلى مصفوفة معاملات النظام، بينما يرمز X إلى **مصفوفة المجاهيل** **Variable matrix** . ويرمز B إلى **مصفوفة الثوابت** **Constant matrix** .

المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل نظام المعادلتَيْن الخطّيتين $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$ هي:

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \bullet \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

مصفوفة المعاملات ← A، مصفوفة المجاهيل ← X، مصفوفة الثوابت ← B

لِحل المعادلة المصفوفية $AX=B$، اضرب كلاً من طرفيّ المعادلة بمقلوب المصفوفة A (بافتراض وجوده):

$A^{-1}AX = A^{-1}B$

$IX = A^{-1}B$ ناتج ضرب المصفوفة A في مقلوبها هو مصفوفة الوحدة I

$X = A^{-1}B$

مثـــــال 3 **حل نظام معادلات خطّيّة باستعمال مقلوب المصفوفة**

اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل النظام الخطّي $\begin{cases} x+y=8 \\ 2x+y=1 \end{cases}$، ثم حُلَّها.

الخطوة 1 اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل نظام المعادلتَيْن.

$$\overset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}} \overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

الخطوة 2 جِد محدِّد مصفوفة المعاملات.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\times1-1\times2=-1\neq0$$

الخطوة 3 جِد مقلوب مصفوفة المعاملات.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

الخطوة 4 حُل.

$$\overset{X}{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}} = \overset{A^{-1}}{\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}} \overset{B}{\begin{bmatrix} 8 \\ 1 \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} -7 \\ 15 \end{bmatrix}$$

الحل إذن: $x=-7$ وَ $y=15$.

حــاولْ اكتب المعادلة المصفوفية التي تُمثِّل النظام $\begin{cases} x+y=4 \\ 2x+3y=9 \end{cases}$ ثم حُلَّها.

التمـــــارين

التواصل في الرياضيات

أعطِ ناتج الضرب من دون إجراء ضرب المصفوفتَيْن.

1 أ $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ب $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

2 اذكر طريقة لاستعمال محدِّد المصفوفة.

GRADE12-CHAP-2-Adabi(2)-13 2/12/15 1:10 PM Page 24

تمارين موجَّهة

أعطِ ناتج الضرب من دون إجراء ضرب المصفوفتين.

3 $\begin{bmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

4 $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

جِد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

5 $\begin{bmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

6 $\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

7 $\begin{bmatrix} 8 & 7 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$

اكتب نظام المعادلات على الصورة المصفوفية.

8 $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ y = 2x - 4 \end{cases}$

9 $\begin{cases} 2x + 4y = 3 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$

تمارين وتطبيقات

اذكر إن كانت المصفوفة الأولى مقلوب المصفوفة الثانية.

10 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

11 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.2 & -0.2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ ، $\begin{bmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

جِد مقلوب المصفوفة إن كان لها مقلوب.

12 $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$

13 $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

14 $\begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 11 \end{bmatrix}$

اكتب النظام على الصورة المصفوفية.

15 $\begin{cases} x - y = 5 \\ 2y - x = 6 \end{cases}$

16 $\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$

17 **خطوات متعدِّدة** نظَّم نادي بابل نزهة بحرية استعمل فيها 7 قوارب من نوعَين. كبير يتَّسع لـِ 6 أشخاص، وصغير يتَّسع لشخصَيْن. كان عدد المتنزِّهين 34 شخصًا. يُعبِّر النظام الخطّي $\begin{cases} 6x + 2y = 34 \\ x + y = 7 \end{cases}$ عن هذه المسألة، حيث x عدد القوارب الكبيرة، وy عدد القوارب الصغيرة.

أ اكتب مصفوفة المعاملات.

ب اكتب النظام السابق على الصورة المصفوفية.

ج جِد مقلوب مصفوفة المعاملات.

د حُلّ المعادلة المصفوفية لإيجاد عدد القوارب من كل نوع.

18 **خطأ في التحليل** حسب كل من شوان وسافان مقلوب المصفوفة $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$.
أي منهما أخطأ؟ بيِّن الخطأ.

أ شوان $M^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

ب سافان $M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$

19 **تسلية** أخبرك والدك أن في جيبه 5000 دينار مكوَّنة من قطع من فئتي 50 دينارًا وَ 100 دينار، وأنه سيُعطيك إياها، إذا عرفت كم قطعة نقود معه من كل فئة. رغبة منه في مساعدتك، ذكر لك أن عدد القطع كلها 73 قطعة.
استعمل مقلوب مصفوفة لتربح 5000 دينار.

20 للدخول إلى حديقة الحيوانات، دفع شيرزاد 000 24 دينار ثمن 7 بطاقات للصغار وبطاقتَيْن للكبار. دفع مازن 000 46 دينار ثمن 4 بطاقات للكبار وَ 13 بطاقة للصغار. ارمز بالمجهول x إلى ثمن بطاقة الكبار، وبالمجهول y إلى ثمن بطاقة الصغار.
أ عبِّر عن المسألة بواسطة نظام من المعادلات.
ب هل محدِّد مصفوفة المعاملات يساوي الصفر؟ ما عدد الحلول؟
ج استعمل الصورة المصفوفية ومقلوب المصفوفة لإيجاد x وَ y .
د ما ثمن بطاقة الكبار؟ وما ثمن بطاقة الصغار؟

نظرة إلى الوراء

21 استعمل الحذف لحل نظام المعادلات
$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 2x+3y-6z=5 \\ -4x-5y+0.25z=-9 \end{cases}.$$

نظرة إلى الأمام

22 ارسم بيان الدالَّة $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$ وحدِّد إحداثيَّيْ رأسه.

الدوال

Functions

الفصل

3

الدروس

1. الدوال الحدودية
2. دوال التغيّر
3. الدوال الأسّية
4. الدوال اللوغاريتمية

GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 4

ب تُمثِّل الكمّية $f(0)$ نسبة المادة الملوَّنة (بالمليغرام في اللتر) في الدم عند بدء الحقن بالمادة الملوَّنة. أما الكمّية $f(3)$ فتُمثِّل نسبة المادَّة الملوَّنة (بالمليغرام في اللتر) في الدم بعد 3 ثوانٍ من حقنها.

حاوِلْ لدى مريض آخر، كانت الدالَّة $f(t)=0.000468t^4-0.016t^3+0.095t^2+0.806t$ نموذجًا لقياس نسبة المادة الملوَّنة (بالمليغرام في اللتر) في الدم بدلالة الزمن t (بالثواني) الذي انقضى على حقن المادة الملونة. جِد قيمة $f(t)$ عند $t=4$ وَ $t=17$ وصِف ما تُعبِّر عنه كل قيمة.

مثال 2 رسم بيان دالَّة تكعيبية

استعمل الدالَّة $f(x)=x^3-3x$.

أ أكمل الجدول المقابل.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$					

ب عيِّن، في المستوي الإحداثي، النقاط $(x, f(x))$ الواردة في الجدول.

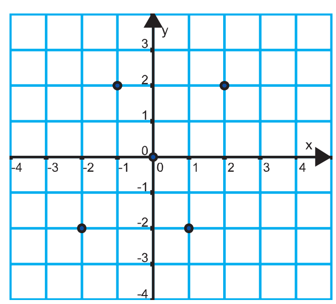
ج اربط بين هذه النقاط بمنحنٍ مناسب.

الحل

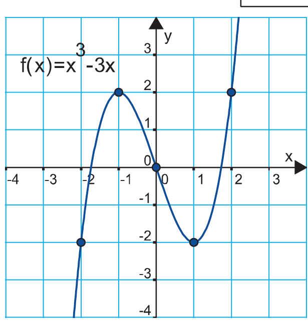
أ

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

ب



ج



حاوِلْ استعمل الدالَّة $f(x)=x^4-8x^2+1$.

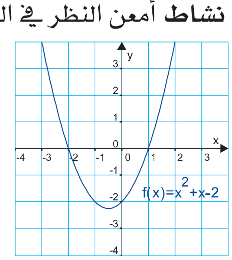
أ أكمل الجدول المقابل.

ب عيِّن، في المستوي الإحداثي، النقاط $(x, f(x))$ الواردة في الجدول.

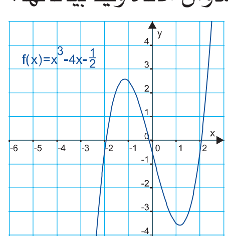
ج اربط بين هذه النقاط بمنحنٍ مناسب.

x	-3	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	3
$f(x)$	-3						

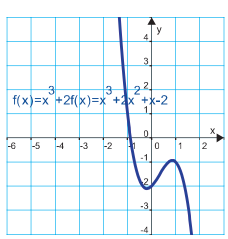
نشاط أمعن النظر في الدوال أدناه وفي بياناتها.



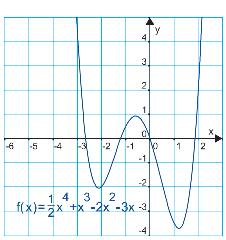
$f(x)=x^2+x-2$



$g(x)=x^3-4x-\frac{1}{2}$



$h(x)=-2x^3+2x^2+x-2$



$k(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3-2x^2-3x$

GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 7

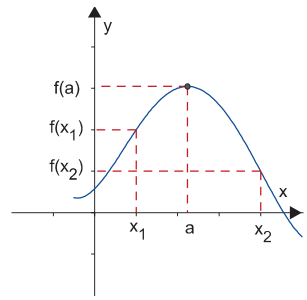
أكمل الجدول مُبيِّنًا عدد تحوُّلات بيان كل دالَّة من الصعود إلى الانحدار، أو بالعكس.

الدالَّة	الدرجة	عدد التحوُّلات
f	2	1
g		
h		
k		

القيَم القصوى للدالّة الحدودية Extremum of Polynomial Function

عندما يتصاعد الرسم البياني لدالّة ثم يبدأ بالانحدار على فترة من مجالها، تتَّخذ الدالّة **قيمة كبرى محلّية Local Maximum** في هذه الفترة. لكن إذا انحدر الرسم البياني للدالّة ثم أخذ في التصاعد على فترة من مجالها، فتتَّخذ الدالّة **قيمة صغرى محلّية Local Minimum** في هذه الفترة.

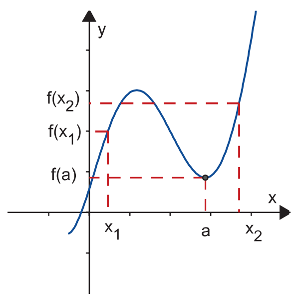
قيمة كبرى محلّية



إذا كان $x \neq a$ في الفترة بين x_1 وَ x_2

فإن $f(x) < f(a)$

قيمة صغرى محلّية



إذا كان $x \neq a$ في الفترة بين x_1 وَ x_2

فإن $f(x) > f(a)$

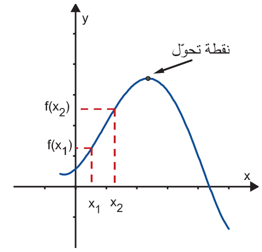
القيَم القصوى

تقول عن العدد $f(a)$ أنه **قيمة كبرى محلّية** إذا كان $f(x) < f(a)$ أيًّا تكن قيمة x في جوار a مع $x \neq a$.

تقول عن العدد $f(a)$ أنه **قيمة صغرى محلّية** إذا كان $f(x) > f(a)$ أيًّا تكن قيمة x في جوار a مع $x \neq a$.

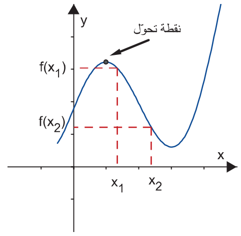
تقول عن العدد $f(a)$ أنه **قيمة قصوى محلّية** إذا كان قيمة كبرى محلّية أو قيمة صغرى محلّية.

أمعن النظر في الرسمَيْن البيانيَّيْن أدناه. لاحظ أن الرسم البياني قد يكون متصاعدًا أو منحدرًا.
نقول عن الدالّة أنها **متزايدة** على فترة من مجالها، إذا كان بيانها متصاعدًا ضمن هذه الفترة.
كما نقول عن الدالّة أنها **متناقصة** على فترة من مجالها، إذا كان بيانها منحدرًا ضمن هذه الفترة.



إذا كان $x_1 < x_2$ في فترة التزايد، فإن

$f(x_1) < f(x_2)$



إذا كان $x_1 < x_2$ في فترة التناقص، فإن

$f(x_1) > f(x_2)$

تُسمّى نقاط البيان العائدة إلى القيَم القصوى المحلية **نقاط تحوّل** في مسار الدالّة. فالدالّة تتحوّل عند مرورها بهذه النقاط من التزايد إلى التناقص، أو بالعكس.
للدالّة التكعيبيّة نقطتا تحوُّل على الأكثر. أما الدالّة من الدرجة الرابعة فلها 3 نقاط تحوُّل على الأكثر. بصورة عامة، فإن عدد نقاط التحوُّل للدالّة الحدودية من الدرجة n، هو $n-1$ على الأكثر.

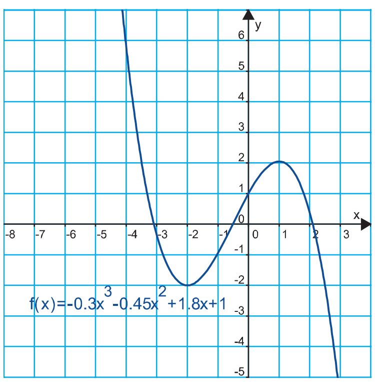
تزايد الدوالّ وتناقصها

x_1 وَ x_2 عددان في فترة من مجال الدالّة $f(x)$.
تكون الدالّة **متزايدة** في هذه الفترة إذا حقّقت الشرط أدناه:
إذا كان $x_1 < x_2$، فإن $f(x_1) < f(x_2)$
تكون الدالّة **متناقصة** في هذه الفترة إذا حقّقت الشرط أدناه:
إذا كان $x_1 < x_2$، فإن $f(x_1) > f(x_2)$

مثـــال 3

تفحَّص البيان المقابل للدالّة:

$$f(x) = -0.3x^3 - 0.45x^2 + 1.8x + 1$$



أ كم عدد نقاط التحوّل لهذه الدالة؟

ب كم عدد القيم القصوى المحلّية؟ وما نوع كل منها؟

ج جِد كل قيمة قصوى محلية وقيمة x العائدة إليها.

د حدِّد فترات تزايد هذه الدالّة وفترات تناقصها.

الحل

أ للدالّة، كما هو ظاهر في بيانها، نقطتا تحوّل: الأولى هي $(-2, -2)$ والثانية هي $(1, 2)$.

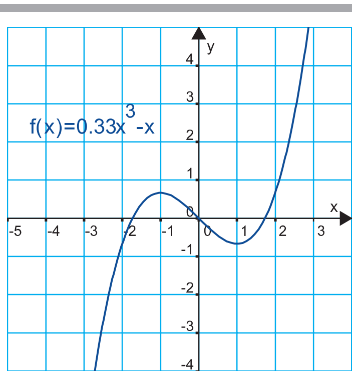
ب للدالّة قيمتان قصويان محليّتان: واحدة كبرى عند $(1, 2)$ والثانية صغرى عند $(-2, -2)$.

ج القيمة القصوى عند $(-2, -2)$ قيمة صغرى محلّية. هي تساوي -2 وقيمة x العائدة إليها هي $x=-2$. والقيمة القصوى عند $(1, 2)$ هي قيمة كبرى محلّية تساوي 2، وقيمة x العائدة إليها هي $x=1$.

د تتناقص الدالّة عندما تكون قيمة x أقلّ من -2، أوعندما تكون أكبر من 1. بينما تتزايد عندما تكون قيم x بين -2 وَ 1.

حـــاولْ

تفحَّص البيان المقابل للدالّة $f(x) = 0.33x^3 - x$



أ كم عدد نقاط التحوّل لهذه الدالة؟

ب كم عدد القيم القصوى المحلّية؟ وما نوع كل منهما؟

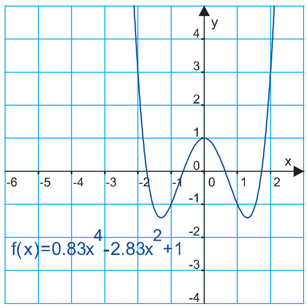
ج جِدكل قيمة قصوى محلّية وقيمة x العائدة إليها.

د حدد فترات تزايد هذه الدالة وفترات تناقصها.

GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 9

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات



1 صف الدالّة الحدودية للبيان المقابل.

2 عرِّف القيمة الكبرى المحلّية والقيمة الصغرى المحلّية.

3 عرِّف تزايد الدالّة وتناقصها على فترة.

تمارين موجّهة

4 **جِد درجة كل دالّة حدودية.**

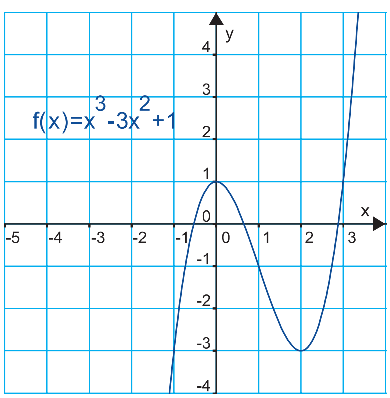
أ $f(x)=4x^3+2x^2-x-1$

ب $g(x)=x^4-3x^2+5x^2-2x-1$

ج $h(x)=6x-4x^4+x^7$

د $k(x)=3x^2+2x^6-4x^4-1$

البيان المقابل هو للدالّة $f(x)=x^3-3x^2+1$.



5 كم عدد نقاط التحوُّل للدالّة؟

6 كم عدد القيَم القصوى المحلّية؟ وما نوع كل منها؟

7 جِد كل قيمة قصوى محلّية، وقيمة x العائد إليها.

8 حدِّد فترات تزايد هذه الدالّة، وفترات تناقصها.

9 استعمل الدالّة $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-2x$.

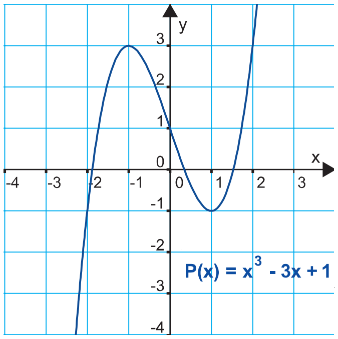
أ أكمل الجدول المقابل.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						

ب عيّن، في المستوي الإحداثي، النقاط $(x, f(x))$ الواردة في الجدول.

ج اربط بين هذه النقاط بمنحنٍ مناسب.

تمارين وتطبيقات



البيان المقابل هو للدالّة $f(x)=x^3-3x+1$.

10 كم عدد نقاط التحوُّل للدالّة؟

11 كم عدد القِيَم القصوى المحلّيّة؟ وما نوع كل منها؟

12 جِد كل قيمة قصوى محلّيّة وقيمة x العائد إليها.

13 حدِّد فترات تزايد هذه الدالّة، وفترات تناقصها.

نظرة إلى الوراء

14 أكمل الجدول لحساب قيَم الدالّة التربيعية $g(x)=x^2-2x-2$. ما أصغر قيمة للدالّة g؟ وما قيمة x العائدة إليها؟

x	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2
$g(x)$									

نظرة إلى الأمام

15 يُبيِّن الجدول أدناه الزمن t بالساعة اللازم لقطع مسافة 600 كيلومتر، تبعًا للسرعة s بالكيلومتر في الساعة. أكمل الجدول، واستنتج علاقة تربط بين المتغيِّرَيْن t وَ s.

السرعة S	الزمن T	المسافة D
30	20	600
40		
50		

الدرس 2

دوال التغيُّر
Variation Functions

لماذا؟

يُمكنك استعمال دوال التغيُّر لتحدّد عدد الأشخاص الكافي لإنجاز مهمّة مثل بناء منزل في وقت محدّد.

الأهداف

- يُميِّز التغيُّر الطردي ويحدِّد ثابته.
- يُميِّز التغيُّر العكسي ويحدِّد ثابته.
- يكتب معادلة تغيُّر عكسي.
- يحل مسائل تتضمَّن تغيُّرًا طرديًّا أو تغيُّرًا عكسيًّا.

المفردات
Vocabulary

دوال التغيُّر
Variation functions
التغيُّر الطردي
Direct Variation
ثابت التغيُّر
Constant of variation
التغيُّر العكسي
Indirect variation
المحاذي العمودي
Vertical asymptote
المحاذي الأفقي
Horizontal asymptote

غالبًا ما ترتبط كمّيّتان بعلاقة تغيُّر، بحيث يُحدِّد تغيُّر قيَم إحداهما تغيُّر قيَم الأخرى. فالزمن اللازم لقطع المسافة بين أربيل وبغداد مثلاً يرتبط بسرعة السيّارة التي تسير من أربيل إلى بغداد. إذا زادت السرعة قلّ الزمن وإذا زاد الزمن قلَّت السرعة. تُعرَّف مثل هذه العلاقات ما يُسمّى **دوال التغيُّر**. سوف تتعلَّم في هذا الدرس نوعَيْن من دوال التغيُّر: دوال **التغيُّر الطردي** ودوال **التغيُّر العكسي**.

التغيّر الطردي Direct Variation

يرتبط متغيّران x وَ y بعلاقة تغيُّر طردي، إذا كانت نسبة أحدهما إلى الآخر ثابتة لا تتغيّر، أي إذا كان $\frac{y}{x}=k$ أو $y=kx$، حيث $k\neq 0$ عدد حقيقي معيّن. فالمسافة التي تقطعها سيارة تسير بسرعة ثابتة $110\,km/h$ تتغيَّر طردًا بتغيُّر الزمن، فإذا ازداد الزمن ازدادت المسافة، وإذا قلّ قلَّت.

دوال التغيُّر الطردي

تقول عن دالّة $f(x)$ إنها دالّة **تغيُّر طردي**، إذا كانت معادلتها على صورة

$$f(x)=kx$$

حيث k عدد حقيقي مختلف عن 0. يُسمّى k **ثابت التغيُّر**.

مثال 1

قيادة السيارات

تُعطي إحدى الشركات دورات خصوصية لتعليم قيادة السيارات، فإذا أعطت الشركة لأحد المتقدمين 8 ساعات في الأسبوع الأوّل وتقاضت 240 000 دينار، وأعطت في الأسبوع الثاني 11 ساعة. كم تقاضت في الأسبوع الثاني، علمًا بأن ما تتقاضاه الشركة يتغيّر طردًا بتغيُّر عدد الساعات.

الحل

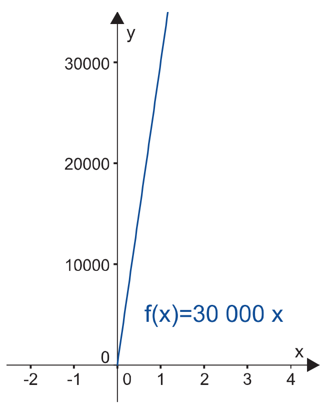
بما أن ما تتقاضاه الشركة (S) يتغيّر طردًا بتغيُّر عددالساعات(x) ، فإن ثابت التغيُّر k هو نسبة S إلى x، أي أن $k=\frac{S}{x}=\frac{240\,000}{8}=30000$، وبالتالي $S(x)=30000x$.

في الأسبوع الثاني، تقاضت الشركة $S(11)=30000\times11=330\,000$ ، أي330 000 دينار.

تفكير ناقد ماذا يُمثِّل ثابت التغيُّر في المثال 1؟

حاولْ قرر أحمد أن يقوم بجولة حول العالم سيرًا على الأقدام بوتيرة ثابتة. في الأسبوع الأول، سار 6 أيام وقطع 384 كيلومترًا. كم كيلومترًا قطع في الأسبوع الثاني، علمًا بأنه استراح يومَيْن؟

دوال التغيُّر الطردي هي حالة خاصَّة من الدوال الخطّية.
تعرف أن الصورة العامَّة لدالّة خطّية هي $f(x)=ax+b$
حيث a هو الميل، وَ b التقاطع العمودي. دوال التغيُّر الطردي هي دوال خطّية تقاطعها العمودي يساوي 0. ينتج من ذلك أن بيان دالّة تغيُّر طردي هو مستقيم يمر في نقطة الأصل.



مثال 2 ارسم بيان دالّة المثال 1.

الحل

انظر الرسم المقابل، لاحظ أن الدالّة غير مُعرَّفة عندما يتَّخذ x قيمًا سالبة، لأن هذا المتغيِّر يُمثِّل عدد الساعات التي أعطتها الشركة.

حاولْ ارسم بيان دالّة فقرة «حاول» التي تلي المثال 1.

دوال التغيُّر العكسي Indirect Variation Function

تقول عن دالّة $f(x)$ أنها دالة **تغيُّر عكسي**، إذا كانت معادلتها على صورة

$$xy=k \quad \text{أو} \quad f(x)=\frac{k}{x}$$

حيث k عدد حقيقي مختلف عن 0. يُسمى k **ثابت التغيُّر**.

مثال 3

تشجير

تعهَّد أحد فرق الكشّافة بزراعة 500 شُجيرة لتحريج منطقة جرداء. قُدِّر عدد الشُجيرات التي يزرعها كل فريق من شخصَيْن بِـ 10 شُجيرات.

أ كم ساعة تستغرق المهمَّة إذا أنجزها فريق واحد؟

ب كم ساعة تستغرق المهمَّة إذا أنجزها 50 فريقًا معًا؟

ج كم ساعة تستغرق المهمة إذا أنجزها 100 فريق معًا؟

د اكتب دالّة تغيُّر عكسي تُمثِّل عدد الساعات T الذي تستغرقه المهمَّة إذا أنجزها x فريقًا.

هـ استعمل هذه الدالّة لحساب $T(50)$ وَ $T(100)$، وقارن ما حصلت عليه مع جوابَيْ ب وَ ج.

الحل

أ $50 = 10 \div 500$. تستغرق المهمَّة 50 ساعة إذا أنجزها فريق واحد.

ب $10 = 50 \div 500$. تستغرق المهمَّة 10ساعات إذا أنجزها 50 فريقًا معًا.

ج $5 = 100 \div 500$. تستغرق المهمَّة 5 ساعات إذا أنجزها 100 فريق معًا.

د لاحظ أن $500 = 10 \times 50$ وَ $500 = 50 \times 10$ وَ $500 = 100 \times 5$. ينتج من هذه الملاحظة أن $500 = T \times x$ أو $T = \frac{500}{x}$. دالّة التغيُّر العكسي هي $T(x) = \frac{500}{x}$.

هـ $T(50) = \frac{500}{50} = 10$ وَ $T(100) = \frac{500}{100} = 5$ ، تتوافق هاتان النتيجتان مع جوابَي السؤالَيْن ب وَ ج.

حاولْ قطعت سيارة، تسير بسرعة ثابتة، المسافة بين أربيل وبغداد، وهي 450 كيلومترًا، في 6 ساعات.

أ كم كانت سرعة هذه السيارة؟

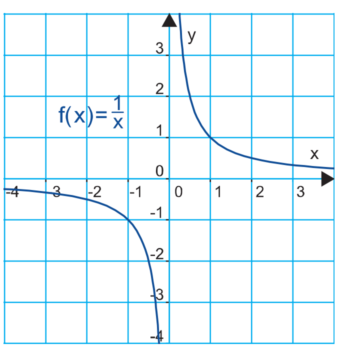
ب كم كانت سرعة سيارة قطعت المسافة بسرعة ثابتة خلال 8 ساعات؟

ج اكتب دالّة تغيُّر عكسي تُبيِّن سرعة السيارة S ، بافتراض أنها ثابتة، بدلالة الزمن x (بالساعة) الذي استغرقته الرحلة من أربيل إلى بغداد.

د كم كانت سرعة سيارة قطعت المسافة في 4 ساعات، علمًا بأن سرعتها كانت ثابتة؟

دالّة المقلوب Inverse Function

دالّة المقلوب هي الدالّة المُعرَّفة بالمعادلة $f(x) = \frac{1}{x}$.



يبيِّن الشكل المقابل بيان دالّة المقلوب.
إذا أمعنت النظر في هذا البيان، تلاحظ الأمور التالية:

1. يُمكنك أن تحسب قيمة y المقابلة لقيمة x مهما تكن القيمة التي يتَّخذها x باستثناء الصفر. مجال دالّة المقلوب هو، إذن، مجموعة الأعداد الحقيقيّة المختلفة عن الصفر.
2. كلما تزايدت قيَم x تناقصت قيَم y. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن الدالّة **متناقصة**.
3. عندما يكون المتغيِّر x موجبًا وتتزايد قيَمه، تقترب قيَم y من الصفر مع بقائها موجبة. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن y **يسعى إلى الصفر موجبًا عندما يسعى x إلى $+\infty$**.
4. عندما يكون المتغيِّر x سالبًا وتتناقص قيَمه، تقترب قيَم y من الصفر مع بقائها سالبة. تُعبِّر عن ذلك بالقول إن y **يسعى إلى الصفر سالبًا عندما يسعى x إلى $-\infty$** .
5. تقترب قيَم y من الصفر كلّما اتَّخذ المتغيِّر x قيَمًا يتزايد مُطلَقها أكثر فأكثر. تعبِّر عن ذلك بالقول إن المستقيم المتمثِّل بالمعادلة $y = 0$ ، أي المحور x، يشكِّل **محاذيًا أفقيًا** لبيان دالّة المقلوب.

6. كلما تزايدت القيَم السالبة للمتغيِّر x، تناقصت قيَم y مع بقائها سالبة. تعبِّر عن ذلك بالقول إن y **يسعى إلى $-\infty$، عندما يسعى x إلى الصفر من اليسار.**
7. كلما تناقصت القيَم الموجبة للمتغيِّر x، تزايدت قيَم y مع بقائها موجبة. تعبِّر عن ذلك بالقول إن y **يسعى إلى $+\infty$ عندما يسعى x إلى الصفر من اليمين.**
8. يتزايد مُطلق قيَم y أكثر فأكثر كلّما اتَّخذ المتغيِّر x قيَمًا يتناقص مطلقها أكثر فأكثر.
تعبِّر عن ذلك بالقول إن المستقيم المتمثِّل بالمعادلة $x=0$ ، أي المحور y، يشكِّل **محاذيًا عموديًّا** لبيان دالّة المقلوب.

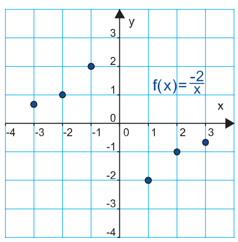
مثـــــال 4 ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{-2}{x}$.

الحل

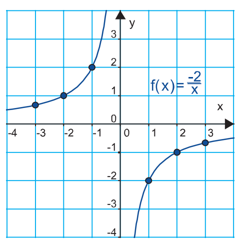
الخطوة 1 أنشئ جدول قيم.

x	-3	-2	-1	1	2	3
$f(x)$	$\frac{2}{3}$	1	2	-2	-1	$-\frac{2}{3}$

الخطوة 2 عيِّن النقاط التي تمثِّل الجدول.



الخطوة 3 ارسم منحنيًا مناسبًا آخذًا في الحسبان أن المحور x محاذٍ أفقي للبيان، وأن المحور y محاذٍ عمودي له.



حـــاولْ ارسم بيان الدالّة $f(x)=\frac{3}{x}$.

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1. إذا كان لديك جدول يُبيِّن قيمًا للمتغيِّر x وقيم المتغيِّر y التي تُقابلها، فكيف تعلم إن هذا الجدول يُمثِّل علاقة تغيُّر طردي تربط بين المتغيِّرَيْن؟ وكيف تجد ثابت التغيُّر في هذه الحالة؟
2. إذا كان لديك جدول يُبيِّن قيمًا للمتغيِّر x وقيم المتغيِّر y التي تُقابلها، فكيف تعلم إن كان هذا الجدول يُمثِّل علاقة تغيُّر عكسي تربط بين المتغيِّرَيْن؟ وكيف تجد ثابت التغيُّر في هذه الحالة؟
3. يرتبط متغيِّران x وَ y بعلاقة تغيُّر عكسي بحيث يكون $y=3$ عند $x=8$. اشرح كيف تجد قيمة y عند $x=2$.

GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 15

تمارين موجّهة

4 يتغيَّر ما يتقاضاه سعيد مقابل عمله في المصنع طردًا بتغيُّر عدد ساعات العمل. تقاضى 300 000 دينار الأسبوع الماضي حيث اشتغل 20 ساعة.

أ اكتب معادلة دالة تغيُّر طردي تُعبِّر عن المسألة.

ب اشتغل سعيد 24 ساعة هذا الأسبوع، كم سيتقاضى؟

ج قرَّر سعيد أن يتقاضى الأسبوع المقبل 450 000 دينار. كم ساعة عليه أن يشتغل؟

5 تسير سيّارة بسرعة ثابتة على الطريق السريع من السليمانية إلى البصرة (920 كيلومترًا). قطعت شيرين المسافة بسرعة قدرها $100\,km/h$.

أ اكتب معادلة دالّة تغيُّر عكسي لحساب الزمن T الذي تستغرقه الرحلة بدلالة السرعة s.

ب قطع مسعود المسافة نفسها بسرعة $125\,km/h$. كم دامت رحلة مسعود؟

ج غادر شاكر السليمانية عند الساعة الثامنة صباحًا، وهو يريد أن يبلغ البصرة عند الساعة السابعة مساء، مع توقُّف ساعة للغداء. بأي سرعة عليه أن يقود سيارته؟

حدِّد إن كان الجدول يُمثِّل علاقة تغيُّر طردي أو علاقة تغيّر عكسي، أو لا هذه ولا تلك.

6

x	6	4	1
y	2	3	12

7

x	2	5	9
y	3	6	4

8

x	24	4	12
y	30	5	15

تمارين وتطبيقات

9 تستعد فرقة المسرح الوطني لمسرحية جديدة بمناسبة عيد النوروز. يتطلّب تحضير الديكور لهذه المسرحية 3 أيام لو عمل في الورشة 20 عاملاً.

أ اكتب معادلة دالّة تغيُّر عكسي لحساب الزمن T الذي يستغرقه تحضير الديكور بدلالة عدد العمال x المشاركين في الورشة.

ب اشتغل 12 عاملاً في الورشة، كم سيستغرق تحضير الديكور؟

ج طلب مدير المسرح أن يتم تحضير الديكور في يومَيْن. كم عاملاً يجب أن يشاركوا في الورشة؟

حدِّد إن كان الجدول يُمثِّل علاقة تغيُّر طردي أو علاقة تغيُّر عكسي أو لا هذه ولا تلك.

10

x	8	14	24
y	12	21	36

11

x	5	6.25	10
y	5	4	2.5

12

x	5	7	9
y	3	5	7

13 تنظِّم رابطة خرّيجي جامعة دهوك رحلة إلى عمان يشترك فيها طلاب الجامعة. تتغيّر قيمة الاشتراك بالرحلة عكسًا بتغيُّر عدد المشاركين. سيكون سعر الاشتراك للطالب الواحد 250 000 دينار لو كان عدد المشاركين 24 طالبًا. كم يجب أن يكون عدد المشاركين لكي يُصبح سعر اشتراك الطالب الواحد 200 000 دينار؟

نظرة إلى الوراء

ما درجة كل حدودية؟

14 $f(x)=3x^5-2x^4+x^2+1$

15 $g(x)=2-5x+7x^2-x^3$

16 $h(x)=-5x^3-x^4+1$

نظرة إلى الأمام

17 يتضاعف عدد أفراد مجموعة من البكتيريا كل ساعة. كم سيكون عدد أفراد مجموعة بدأت بفردَيْن بعد 5 ساعات؟

الدرس 3

الدوال الأسّية
Exponential Functions

لماذا؟ يستطيع الذين يقتنون الأشياء النادرة أن يستعملوا الدوال الأسّية لإنشاء نموذج يمثِّل قيمة الأشياء التي يقتنونها، كالآلات الموسيقية النادرة.

الأهداف
- يكتب مقادير أسّية لتمثيل حالات النمو والتراجع، ويحسب هذه المقادير.
- يُميّز دوال النموّ الأسّي ودوال التراجع الأسّي.
- يُميّز الدوال الأسّية الطبيعية.

المفردات Vocabulary
- الدالّة الأسّية Exponetial function
- الأساس Base
- المحاذي Asymptote
- النمو الأسّي Exponetial growth
- التراجع الأسّي Exponetial decay
- الدالّة الأسّية الطبيعية Natural exponetial function

ينص قانون مور Moore، المستعمل في صناعة الحواسيب، على أن عدد الترانزيستورات التي تتضمَّنها مكوِّنات الحاسوب، يتضاعف كل سنة. يُبيّن الجدول أدناه أعدادًا تقريبية حول تزايد عدد الترانزيستورات التي يتضمّنها مكوِّن منذ بدايات هذه الصناعة.

عدد الترانزيستورات في مكوِّن							
السنة	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971
العدد	60	120	240	480	960	1920	3840

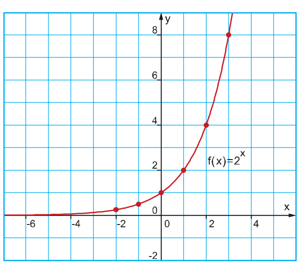
×2 ×2 ×2 ×2 ×2 ×2

يُمكن تمثيل النمو الذي يتضاعف كل سنة باستعمال دالّة تتضمَّن المتغيّر في الأس. تُعرف مثل هذه الدوال **بالدوال الأسّية**. أبسط الدوالّ الأسِّيّة هي الدالَّة $f(x)=b^x$ حيث **الأساس** b عدد ثابت، والأس x المتغيِّر الحر.

الأسّ الأساس

$f(x)=b^x$ و $b>0, b\neq1$

يُبيّن الرسم المقابل بيان الدالَّة الأسّية $f(x)=2^x$. مجال هذه الدالّة هو مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة، في حين أن مداها هو مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة $\{y / y>0\}$.



x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

لاحظ أن بيان الدالَّة يقترب أكثر فأكثر من المحور x كلما تناقصت قيم x . لاحظ أيضًا أن البيان لا يمسّ المحور x ويبقى فوقه، لأن قيمة المقدار 2^x تبقى موجبة أيًّا تكن قيمة x . المحور x هو محاذ أفقي لبيان الدالَّة $f(x)=2^x$. **المحاذي** مستقيم يقترب منه بيان الدالّة أكثر فأكثر كلما أصبحت قيم x كبيرة جدًّا أو صغيرة جدًّا.

في العلاقة $y=b^x$ ، y متغيّر تابع للمتغيّر x ، لأن قيمة y تُحدَّد بقيمة x .

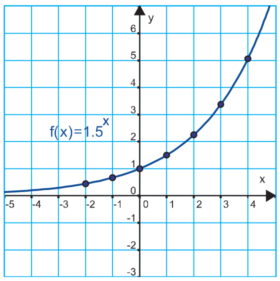
كل دالَّة $f(x)=ab^x$ ، حيث $a>0$ وَ $b>1$ هي دالّة **نموّ أسّي** تتزايد قيمتها بتزايد قيمة x .
أما إذا كان $0<b<1$ فالدالّة $f(x)=ab^x$ هي دالَّة **تراجع أسّي** تتناقص قيمتها بتزايد قيمة x .

GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 16

مثـــــال 1 رسم بيانات الدوال الأسّية

اذكر إن كانت الدالَّة دالَّة نمو أسّي أو دالَّة تراجع أسّي، ثم ارسم بيانها.

أ $f(x)=1.5^x$



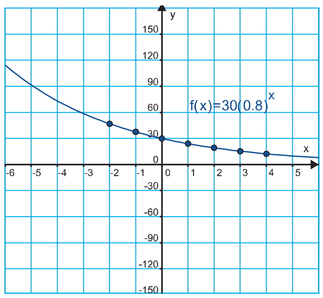
الخطوة 1 ميِّز قيمة الأساس.

$f(x)=1.5^x$ الأساس، 1.5 أكبر من 1، الدالَّة هي دالَّة نمو أسّي.

الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة باستعمال جدول قيم.

x	-2	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.4	0.7	1	1.5	2.3	3.4	5.1

ب $f(x)=30(0.8)^x$



الخطوة 1 ميِّز قيمة الأساس.

$f(x)=30(0.8)^x$ الأساس، 0.8 أصغر من 1، الدالَّة هي دالَّة تراجع أسّي.

الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة باستعمال جدول قيم.

x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	30	19.2	12.29	7.86	5.03	2.22	2.06

حــــاولْ اذكر إن كانت الدالَّة $f(x)=5(1.2)^x$ دالَّة نموّ أسّي أو دالَّة تراجع أسّي.ارسم بيانها.

يُمكنك تمثيل النمو أو التراجع باستعمال النسبة المئوية لهذا النمو أو التراجع. فإذا كانت $r\%$ النسبة المئوية للنمو أو التراجع لكمّية معيَّنة من خلال فترة زمنية محددة (سنة أو شهر أو أسبوع أو ساعة...)، كإيداع مبلغ من المال في مصرف، فإن القاعدة أدناه تسمح لك بإيجاد قيمة هذا المبلغ بعد t فترة زمنية:

المقدار الأصلي — عدد الفترات الزمنية

$$A(t)=a(1\pm r)^t$$

المقدار النهائي — معدّل التغيُّر

أساس هذه الدالّة الأسّية هو $1+r$ في حالة النموّ، ويُسمى **عامل النمو**، وَ $1-r$ في حالة التراجع، ويُسمّى **عامل التراجع**.

مثـــــال 2 تطبيق على الاقتصاد

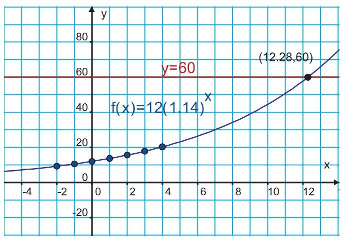
في العام 2000، اشترى كوفند غيتارًا نادرًا يعود إلى العام 1959، دفع ثمنه 12 مليون دينار. قدّر الخبراء أن قيمته تزداد بمعدل 14% سنويًا. جِد بيانيًا السنة التي يُصبح فيها ثمن الغيتار 60 مليون دينار.

الخطوة 1 اكتب دالَّة تشكّل نموذجًا لتغيُّر قيمة الغيتار.

$f(t)=a(1+r)^t$ دالَّة نمو أسّي

$=12(1+0.14)^t$ عوّض عن a بقيمته 12، وعن r بقيمته 0.14

$=12(1.14)^t$



الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة باستعمال جدول قيم

x	–8	–4	0	2	4	8
$f(x)$	4.21	7.1	12	15.6	20.27	34.23

عيِّن النقاط التي تمثِّل الجدول، ثم ارسم منحنيًا مناسبًا يمر في هذه النقاط.

الخطوة 3 ارسم المستقيم $y=60$ وقدّر الإحداثي x لنقطة تقاطعه مع بيان الدالة.

يُظهر الرسم البياني أن الإحداثي x لنقطة التقاطع، يقع بين 12 وَ 13 مما يُفيد بأن ثمن الغيتار سيبلغ 60 مليون دينار في السنة الثالثة عشرة بعد شرائه، أي في العام 2013.

حـــاولْ كان عدد الحيتان المحدَّبة الأسترالية 350 حوتًا سنة 1981. وتزايد عددها بمعدل 12% سنويًّا. اكتب دالَّة أسّية تشكِّل نموذجًا لهذا التزايد، ثم ارسم بيان الدالَّة واستعمله لتحدِّد السنة التي سيبلغ فيها عدد هذه الحيتان 1500 حوت.

مثـــــال تطبيق على تراجع الثمن

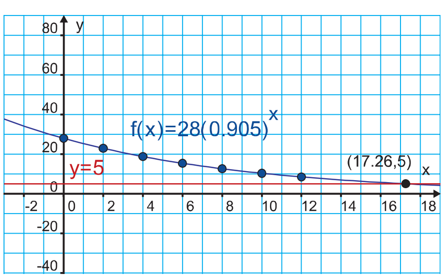
تتناقص قيمة شاحنة جديدة، ثمنها 28 مليون دينار، بمعدَّل 9.5% سنويًّا. اكتب دالَّة أسّية تشكِّل نموذجًا لهذا التناقص. ثم ارسم بيان الدالَّة واستعمله لتحدِّد السنة التي سيبلغ فيها ثمن الشاحنة 5 ملايين دينار.

الخطوة 1 اكتب دالَّة تشكِّل نموذجًا لتغيُّر قيمة الشاحنة.

$f(t)=a(1-r)^t$ دالَّة تراجع أسّي

$=28(1-0.095)^t$ عوِّض عن a بقيمته 28 ، وعن r بقيمته 0.095

$=28(0.905)^t$



الخطوة 2 ارسم بيان الدالَّة.

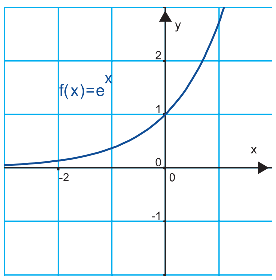
x	0	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	28	22.93	18.78	15.38	12.6	10.32	8.45

عيِّن النقاط التي تمثِّل الجدول وارسم منحنيًا مناسبًا يمر فيها.

الخطوة 3 ارسم المستقيم $y=5$، وقدّر الإحداثي لنقطة تقاطعه مع بيان الدالّة.
يُظهر الرسم البياني أن الإحداثي x لنقطة تقاطع المستقيم مع بيان الدالَّة يقع بين 17 وَ 18، مما يُفيد بأن ثمن الشاحنة سيبلغ 5 ملايين دينار في السنة الثامنة عشرة بعد شرائها.

حاولْ يتناقص ثمن دراجة نارية ثمنها مليون دينار بمعدَّل 15% سنويًّا. اكتب دالَّة أسّية تشكِّل نموذجًا لهذا التناقص، ثم ارسم بيان الدالَّة واستعمله لتحدِّد متى يصبح ثمنها 100 ألف دينار.

هناك نوع معيّن من الدوال الأسية يؤدي دورًا مهمًّا في التطبيقات الاقتصادية والاجتماعية والمالية.إنها الدوال الأسّية التي أساسها عدد نيبر *Neper* الذي يُرمز إليه بالحرف الإنكليزي e. هذا العدد هو، كالعدد π، عدد غير نسبي قيمته
$e=2.718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 4....$



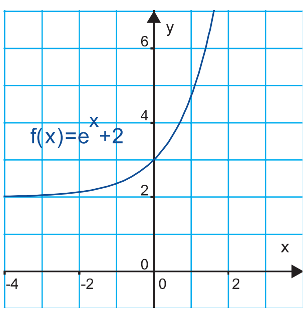
تُسمّى الدوال الأسّية التي أساسها e **الدوال الأسّية الطبيعية**. تتمتَّع الدوال الأسّية الطبيعية بجميع خصائص الدوال الأسّية.

مثال 4 رسم بيانات الدوال الأسّية الطبيعية

ارسم بيان الدالّة $f(x)=e^x+2$.

الحل
أنشئ جدول قيم لهذه الدالّة. بما أن العدد e غير نسبي، فعليك تقريب قيم الدالّة إلى العُشر مثلاً.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=e^x+2$	2.0	2.1	2.4	3	4.7	9.4	22.1



حاولْ ارسم بيان الدالّة $f(x)=e^x-3$.

التمارين

التواصل في الرياضيات

1. دالَّة أسِّيّة يقع أساسها بين 0 وَ 1، هل الدالّة دالّة نموّ أسّي أم دالّة تراجع أسّي؟
2. تمثِّل الدالّة الأسّية $f(x)=25\times2^x$ نمو مجموعة من البكتيريا. ماذا يُمثِّل العدد 25؟ ماذا يُمثِّل العدد 2؟
3. تمثِّل الدالّة الأسّية $f(x)=25\times2^x$ نموّ مجموعة من البكتيريا. ما النسبة المئوية لنمو هذه المجموعة؟

تمارين موجّهة

في التمارين من 4 - 12 اذكر إن كانت الدالّة دالّة نمو أسّي أو دالّة تراجع أسّي.

4) $f(x)=32(0.5^x)$

5) $f(x)=0.5(1.2^x)$

6) $f(x)=0.4\left(\frac{3}{4}\right)^x$

7) $f(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$

8) $f(x)=\frac{1}{3}(1.3)^x$

9) $f(x)=10(2.7)^x$

10) $f(x)=2(10)^x$

11) $f(x)=0^x$

12) $f(x)=1(0.5)^x$

تمارين وتطبيقات

13) **حاسوب** تتناقص قيمة الحواسيب بمعدل 30% سنويًا. اشترى كاوه حاسوبًا متطوِّرًا بـ 000 765 2 دينار. قدّر عدد السنوات اللازمة لكي تقلّ قيمة هذا الحاسوب عن 000 350 دينار.

14) **مصارف** تستعمل المصارف قانونًا لحساب القيمة الآنيَّة لمبلغ مودع. هذا القانون هو $A=P\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}$ ، حيث A المبلغ الآنيّ، وَ P المبلغ الأصلي المودع، وَ r معدَّل الفائدة السنوي، وَ t المدة بالسنوات، وَ n عدد الفترات في السنة التي يتم فيها تذخير الحساب، أي حساب الفائدة وإضافتها إلى المبلغ المودع. أودع خسرو 5 ملايين دينار بفائدة معدّلها السنوي 5% ، بتذخير فصليّ (4 مرات في السنة).

أ كم ستكون قيمة المبلغ بعد 5 سنوات؟

ب متى يتجاوز المبلغ المودع العشرة ملايين دينار؟

ج **ماذا لو...؟** كم سيربح خسرو بعد 5 سنوات، لو أن تذخير الحساب تم شهريًّا وليس فصليًّا؟

15) **تقدير** قُدِّر عدد سكان الأرض سنة 2000 بـ 6.1 مليارات نسمة. كما قُدِّر معدَّل تزايدهم بـ 1.4% سنويًّا. قدِّرْ عدد سكّان الأرض سنة 2020. اكتب دالَّة تمثِّل نموّ عدد سكان الأرض بدلالة السنوات بعد العام 2000 (2000 = السنة 0)، واستعملها لتقارن تقديرك السابق مع ما تحسبه باستعمال الدالَّة.

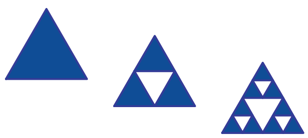
نظرة إلى الوراء

16 **حُلّ النظام الخطي التالي:**

$$\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=2 \\ 2x+y-3z=-1 \end{cases}$$

نظرة إلى الأمام

17 مثلث سيربنسكي هو شكل تحصل عليه من مثلث متساوي الأضلاع، بنزع مثلث متساوي الأضلاع من وسط المثلث الأول، ثم تكرار ذلك على كل مثلث تحصل عليه.
كم سيكون عدد المثلثات الملوّنة في المرحلة الخامسة؟



GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 23

الدرس 4

الدوال اللوغاريتمية

Logarithmic Functions

لماذا؟
تُستعمل اللوغاريتمات لقياس حموضة الماء

الأهداف
- يكتب الصور المتكافئة للدوال الأسّية واللوغاريتمية.
- يكتب الدوال اللوغاريتمية ويرسم بياناتها ويحسب قيمها.

المفردات
Vocabulary

اللوغاريتم Logarithm

اللوغاريتم العادي Common logarithm

اللوغاريتم الطبيعي Natural logarithm

الدالّة اللوغاريتمية Logarithmic function

كم مرة تُضاعف دينارًا واحدًا ليُصبح 8 دنانير؟ يُمكنك استعمال معادلة لتمثيل هذا الأمر: $1\times(2)^x=8$. قد تستطيع حل هذه المعادلة ذهنيًّا إذا تذكرت أن $2^3=8$. إذن، عليك مضاعفة الدينار الواحد 3 مرات للحصول على 8 دنانير.

كم مرة تُضاعف دينارًا واحدا ليُصبح 512 دينارًا؟ يُمكنك حل هذه المسألة إذا كنت قادرًا على حل المعادلة $2^x=512$، باستعمال العملية العكسية لعملية رفع عدد معيّن إلى قوة بأس معيّن. هذه العملية العكسية هي حساب اللوغاريتم. اللوغاريتم هو أس القوة التي ترفع إليها عددًا (أساسًا) معيّنًا لتحصل على قيمة مُعطاة.

يُمكنك كتابة معادلة أسّية على صورة معادلة لوغاريتمية وبالعكس.

معادلة أسّية **معادلة لوغاريتمية**

$$b^x=a \quad \longleftrightarrow \quad \log_b a=x$$

$$b>0,\ b\neq 1$$

GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 22

مثــــــال 1 التحويل من الصورة الأسّية إلى الصورة اللوغاريتمية

اكتب كل معادلة أسّية على الصورة اللوغاريتمية.

	المعادلة الأسّية	الصورة اللوغاريتمية	
أ	$2^6=64$	$\log_2 64=6$	أساس القوة يُصبح أساس اللوغاريتم.
ب	$4^1=4$	$\log_4 4=1$	أس القوة هو اللوغاريتم.
ج	$5^0=1$	$\log_5 1=0$	قوة أي عدد مختلف عن الصفر بأس صفر هي 1.
د	$5^{-2}=0.04$	$\log_5 0.04=-2$	قد يكون الأس (أو اللوغاريتم) سالباً.
هـ	$3^x=81$	$\log_3 81=x$	قد يكون اللوغاريتم (أو الأس) متغيراً.

حــاولْ اكتب المعادلة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

أ $9^2=81$ ب $3^3=27$ ج $x^0=1(x\neq 0)$

مثــــــال 2 التحويل من الصورة اللوغاريتمية إلى الصورة الأسّية.

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

	المعادلة اللوغاريتمية	الصورة الأسّية	
أ	$\log_{10} 100=2$	$10^2=100$	أساس اللوغاريتم يُصبح أساس القوة.
ب	$\log_7 49=2$	$7^2=49$	اللوغاريتم هو أس القوة.
ج	$\log_8 0.125=-1$	$8^{-1}=0.125$	قد يكون اللوغاريتم سالباً.
د	$\log_5 5=1$	$5^1=5$	
هـ	$\log_{12} 1=0$	$12^0=1$	

حــاولْ اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

أ $\log_{10} 10=1$ ب $\log_{12} 144=2$ ج $\log_{\frac{1}{2}} 8=-3$

اللوغاريتم أس. يسمح هذا الأمر بتطبيق قوانين القوى على اللوغاريتمات. ربما لاحظت الخصائص التالية في المثال الأخير.

Some Properties of Logarithm بعض خصائص اللوغاريتمات

أيًّا يكن الأساس b حيث $b>0$ وَ $b\neq 1$.

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأسّية	مثال
لوغاريتم b بأساس b. $\log_b b=1$	$b^1=b$	$\log_{10} 10=1$ $10^1=10$
لوغاريتم 1 $\log_b 1=0$	$b^0=1$	$\log_{10} 1=0$ $10^0=1$

اللوغاريتم العادي لوغاريتم بأساس 10. إذا لم يُذكر أساس اللوغاريتم فهو 10. مثال: $\log 5=\log_{10} 5$

مثال 3 حساب قيمة لوغاريتم ذهنيًا

احسب القيمة ذهنيًا.

أ) $\log 1000$

$10^{?}=1000$

$10^{3}=1000$

$\log 1000=3$

ب) $\log_4 \frac{1}{4}$

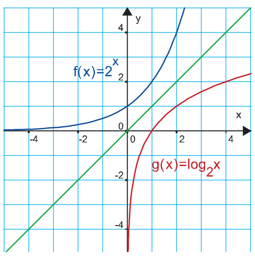
$4^{?}=\frac{1}{4}$

$4^{-1}=\frac{1}{4}$

$\log_4 \frac{1}{4}=-1$

حاول احسب ذهنيًا قيمة المقدار.

أ) $\log 0.00001$ ب) $\log_{25} 0.04$



لما كان ممكنًا الانتقال من كتابة مقدار على الصورة الأسّية إلى كتابته على الصورة اللوغاريتمية وبالعكس، فإن كل دالة أسّية $f(x)$ تولّد دالّة جديدة $g(x)$ مكتوبة على الصورة اللوغاريتمية تُسمّى **الدالّة اللوغاريتمية العكسية**. فإذا كانت $f(x)=b^x$، فإن $g(x)=\log_b x$. مجال الدالّة $g(x)$ هو مدى الدالّة $f(x)$ ومدى الدالّة $g(x)$ هو مجال الدالّة $f(x)$.

يُبيّن الرسم المقابل بيان الدالّة $f(x)=2^x$ وبيان الدالّة اللوغاريتمية العكسية $g(x)=\log_2 x$، كما يُبيّن المستقيم $y=x$. لاحظ أن بيانَي الدالّة الأسّية والدالّة اللوغاريتمية العكسية متناظران بالنسبة إلى هذا المستقيم.

مثال 4 رسم بيانات الدوال اللوغاريتمية

استعمل القيم المُعطاة للمتغيّر x لرسم بيان الدالّة، ثم ارسم بيان الدالّة اللوغاريتمية العكسية. حدّد مجال الدالّة اللوغاريتمية ومداها.

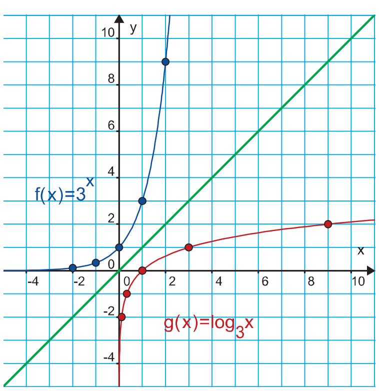
أ) $f(x)=3^x$ ؛ $x=-2,-1,0,1,2$

ارسم بيان الدالّة $f(x)=3^x$ باستعمال جدول القيم.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)=3^x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9

لكي ترسم بيان الدالّة اللوغاريتمية $g(x)=\log_3 x$، بادل بين x وَ $f(x)$ في الجدول أعلاه.

$g(x)=\log_3 x$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9
x	-2	-1	0	1	2



مجال الدالّة اللوغاريتمية g هو $\{x|x>0\}$ ومداها $\mathbb{R}$.

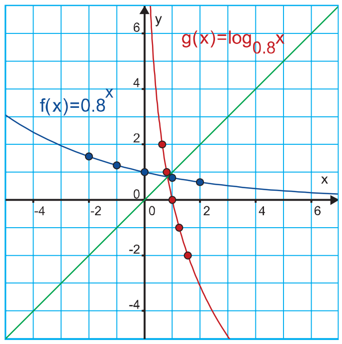
ب $f(x)=0.8^x$ ؛ $x=-3,0,1,4,7$

ارسم بيان الدالّة $f(x)=0.8^x$ باستعمال جدول القيم.

x	-3	0	1	4	7
$f(x)=0.8^x$	2	1	0.8	0.4	0.2

لكي ترسم بيان الدالّة اللوغاريتمية $g(x)=\log_{0.8} x$، بادل بين x وَ $f(x)$ في الجدول أعلاه.

$g(x)=\log_{0.8} x$	2	1	0.8	0.4	0.2
x	-3	0	1	4	7



مجال الدالّة اللوغاريتمية $g(x)$ هو $\{x|x>0\}$ ومداها $\mathbb{R}$.

حـــاولْ استعمل القيم $x=-2,-1,1,2,3$ لرسم بيان الدالّة $f(x)=\left(\frac{3}{4}\right)^x$، ثم ارسم بيان الدالّة اللوغاريتمية العكسية. حدِّد مجال الدالّة اللوغاريتمية ومداها.

اللوغاريتم الطبيعي هو اللوغاريتم بأساس e.

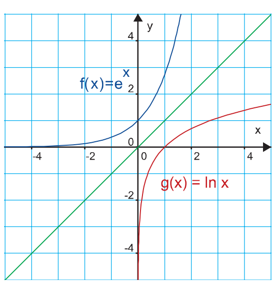
سوف تستعمل الرمز ln للدلالة على اللوغاريتم الطبيعي.

لهذا اللوغاريتم الخصائص نفسها التي يتمتع بها اللوغاريتم العادي (العشري) واللوغاريتمات الأخرى.

دالّة اللوغاريتم الطبيعي $f(x)=\ln x$ هي الدالّة اللوغاريتمية المقابلة للدالّة الأسّية الطبيعية. إنها دالّة اللوغاريتم بأساس e.

مجالها مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة ومداها مجموعة الأعداد الحقيقية كاملة.

أما بيانها فهو البيان المقابل.



GRADE12-CHAP-3-Adabi(2)-13 2/12/15 1:13 PM Page 27

مثــــال 5 تبسيط المقادير الأسّية واللوغاريتمية الطبيعية

اكتب المقدار على أبسط صورة.

أ $\ln e^{-2t}$ **ب** $e^{\ln(x-1)}$ **ج** $e^{5\ln x}$

الحل

$\ln e^{-2t} = -2t$

$e^{\ln(x-1)} = x-1$

$e^{5\ln x} = e^{\ln x^5} = x^5$

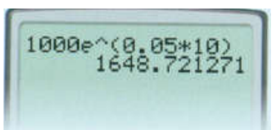
حــاولْ اكتب المقدار على أبسط صورة.

أ $\ln e^{3.2}$ ب $e^{2\ln x}$ ج $\ln e^{x+4y}$

بالعودة إلى قانون الفائدة المركَّبة، يصبح هذا القانون $A = pe^{rt}$ عندما يكون التذخير متواصلاً.

مثــــال 6 تطبيق على الاقتصاد

تم إيداع مليون دينار لمدة 10 سنوات بفائدة معدَّلها السنوي 5%، على أن يتم تذخير الحساب بشكل متواصل. كم ستكون قيمة الحساب بعد السنة العاشرة؟



$A = pe^{rt}$	القانون.
$A = 1000\ 000\ e^{0.05\times 10}$	عوّض.
$A \approx 1\ 648\ 720$	استعمل الحاسبة.

ستكون قيمة الحساب بعد 10 سنوات 720 648 1 دينارًا تقريبًا.

حــاولْ كم ستكون قيمة 000 100 دينار بعد 8 سنوات، علمًا بأنه قد تم إيداع هذا المبلغ في حساب متواصل التذخير، وبفائدة معدَّلها السنوي 3.5%؟

التمــــاريــــن

التواصل في الرياضيات

1. إذا عرفت أن $\log_{10} 5 = 0.6990$، أوضح كيف تحسب $\log_{10} 0.005$ وَ $\log_{10} 500$.

2. قارن بين دالّة اللوغاريتم الطبيعي ودالّة اللوغاريتم العادي.

3. ما قيمة دالّة لوغاريتمية عند $x=1$؟ استنتج أن بيانات جميع الدوال اللوغاريتمية تمر في نقطة معيّنة. ما هي هذه النقطة؟

تمارين موجَّهة

اكتب المعادلة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

4 $2.4^0 = 1$ **5** $4^{1.5} = 8$ **6** $10^{-2} = 0.01$ **7** $3^x = 243$

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

8 $\log_4 0.0625 = -2$ **9** $\log_x(-16) = 3$ **10** $\log_{0.9} 0.81 = 2$ **11** $\log_6 x = 3$

ارسم بيان الدالّة باستعمال القيم المعطاة، ثم ارسم بيان الدالّة اللوغاريتمية العكسية. حدِّد مجال الدالّة اللوغاريتمية ومداها.

12 $f(x) = 5^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 1.5$ **13** $f(x) = 3^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2$

تمارين وتطبيقات

اكتب المعادلة الأسّية على الصورة اللوغاريتمية.

14 $x^{2.5} = 32$ **15** $6^x = 216$ **16** $1.2^0 = 1$ **17** $4^{-1} = 0.25$

اكتب المعادلة اللوغاريتمية على الصورة الأسّية.

18 $\log_5 625 = 4$ **19** $\log_2 x = 6$ **20** $\log_{4.5} 1 = 0$ **21** $\log_\pi \pi = 1$

ارسم بيان الدالّة باستعمال القيم المعطاة، ثم ارسم بيان الدالّة اللوغاريتمية العكسية. حدِّد مجال الدالّة اللوغاريتمية ومداها.

22 $f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$ **23** $f(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ؛ $x = -2, -1, 0, 1, 2, 3$

24 **تقدير** استعمل $\log 2 \approx 0.30$ لتقدر $\log 200$ وَ $\log 2000$.

25 أي مما يلي هو الصورة اللوغاريتمية للمساواة $2^7 = 128$؟

(أ) $\log_2 128 = 7$ (ج) $\log_7 128 = 2$

(ب) $\log_7 2 = 128$ (د) $\log_2 7 = 128$

نظرة إلى الوراء

26 جِد مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

27 ما معامل نمو مبلغ مودع في مصرف بفائدة نسبتها 7.3%؟

نظرة إلى الأمام

28 أمعن النظر في الأعداد التالية وادرسها من اليسار إلى اليمين:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

كيف تنتقل من عدد إلى العدد الذي يليه إلى اليمين بدءًا من العدد 2؟ ما العدد الذي يلي 21؟

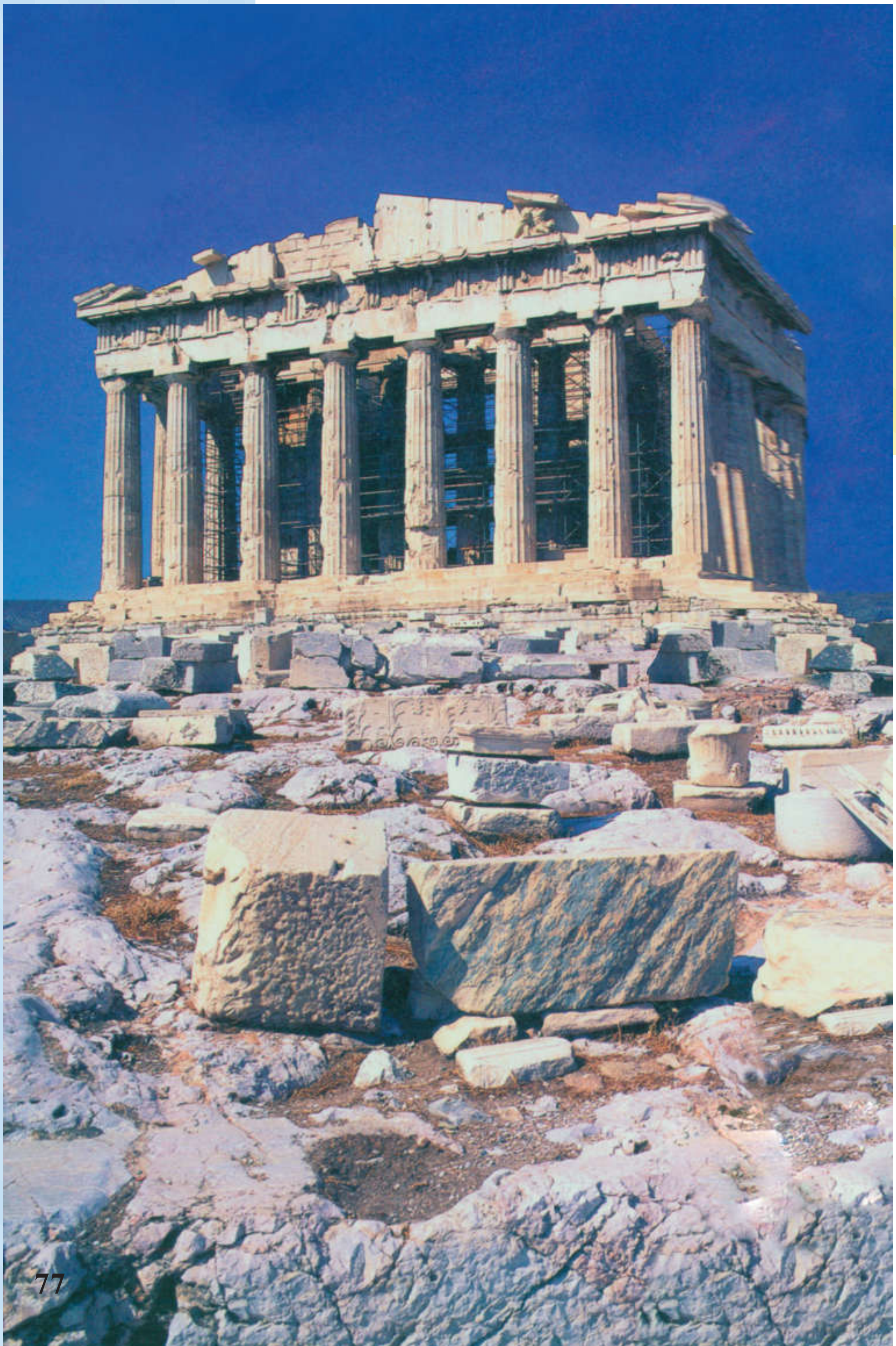
GRADE12-CHAP-4-Adabi(2)-13 2/12/15 1:18 PM Page 3

الفصل

4

المتتاليات

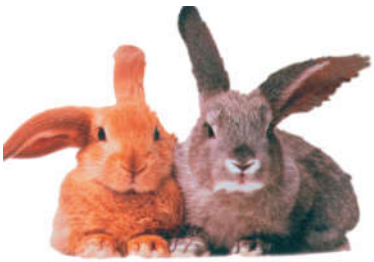
Sequences



الدروس

الدرس 1

المتتاليات الحسابية
Arithmetic Sequences



لماذا؟
تُستعمل المتتاليات لإنشاء نماذج هدفها دراسة الكثير من الظواهر الطبيعية، مثل التغيّر في أعداد مجموعة من الأرانب مع مرور الزمن.

الأهداف
- يجد الحد المطلوب في متتالية حسابية.
- يجد المجاميع الجزئية لمتتالية حسابية.

المفردات
Vocabulary

المتتالية Sequence
حدالمتتالية Term of a sequence
المتتالية غير المنتهية Infinite sequence
المتتالية المنتهية Finite sequence
المتتالية الحسابية Arithmetic sequence

اشترى أمير سيارة جديدة ثمنها 000 750 17 دينار. تُقدِّر مديرية الضرائب قيمة هذه السيارة سنة بعد أخرى كما يلي:

السنة	1	2	3	4
القيمة	17750000	16250000	14750000	13250000

تُشكِّل هذه الأعداد **متتالية**. كل عدد من هذه الأعداد هو **حد** من حدود المتتالية. يُمكن أن يكون للمتتالية عدد غير محدود من الحدود فتُسمّى **متتالية غير منتهية**، أو عدد محدود من الحدود فتُسمّى **متتالية منتهية** كالمتتالية السابقة.

يُمكنك أن تنظر إلى المتتالية على أنها دالَّة يتكوّن مجالها من أعداد صحيحة موجبة ويتكوّن مداها من مجموعة الأعداد التي تُشكّل حدودها.

عوضًا عن استعمال الكتابة الدالّيَّة $a(n)$ لحدود المتتالية، يستعمل العاملون في حقل الرياضيات الكتابة a_n . يُسمّى العدد n **رتبة** الحد a_n. فالحد الأول هو a_1 والحد الثاني هو a_2 ... أما الحد ذو الرتبة n فهو الحد a_n، ويُسمّى **الحد النوني** للمتتالية.

هناك نوعان من المتتاليات يحظيان باهتمام خاص. تتميّز متتاليات النوع الأول بأن للفرق بين كل حد والحد الذي يسبقه قيمة ثابتة. وتتميّز متتاليات النوع الثاني بأن لنسبة كل حد إلى الحد الذي يسبقه قيمة ثابتة. تُسمّى متتاليات النوع الأول **متتاليات حسابية**، بينما تُسمّى متتاليات النوع الثاني **متتاليات هندسية**. سوف تتعلّم في هذا الدرس المتتاليات الحسابية وفي الدرس التالي، المتتاليات الهندسية.

إذا عدت إلى المتتالية الواردة في أول الدرس تجد أن الفروق بين الحدود هي:

$$16250000 - 17750000 = -1500000$$
$$14750000 - 16250000 = -1500000$$
$$13250000 - 14750000 = -1500000$$

مما يُبيّن أن المتتالية متتالية حسابية.

تُسمّى القيمة الثابتة للفروق بين حدود المتتالية **الأساس** Common difference . أساس المتتالية السابقة هو 000 500 1 .

الحد	a_1	a_2	a_3	a_4
القيمة	17750000	16250000	14750000	13250000

−1500000 −1500000 −1500000

مثـــال 1

تمييز المتتاليات الحسابية

حدِّد إن كانت المتتالية حسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الأساس والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.

أ $-3, 2, 7, 12, 17, \ldots$

الحدود	17	12	7	2	-3
الفروق	5	5	5	5	

المتتالية حسابية، وأساسها 5. الحد التالي هو $17+5=22$.

ب $-4, -12, -24, -40, -60, \ldots$

الحدود	-60	-40	-24	-12	-4
الفروق	-20	-16	-12	-8	

المتتالية ليست حسابية، لأن الفرق بين الحد والحد الذي يسبقه غير ثابت.

حـــاولْ **حدِّد إن كانت المتتالية حسابية، أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الأساس والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.**

أ $1.9, 1.2, 0.5, -0.2, -0.9, \ldots$ **ب** $\frac{11}{2}, \frac{11}{3}, \frac{11}{4}, \frac{11}{5}, \frac{11}{6}, \ldots$

تفحّص النمط في الجدول المقابل.

كل حدّ يساوي الحد الأول مضافًا إليه أحد مضاعفات الأساس.

الحد الثاني = الحد الأول + الأساس

الحد الثالث = الحد الأول + 2 × الأساس

وهكذا...

يمكنك تعميم هذا النمط بالقانون التالي:

قيمة السيارة سنة بعد سنة	
n	a_n
1	$a_1 = 17\,750\,000 + 0 \times (-1500\,000)$
2	$a_2 = 17\,750\,000 + 1 \times (-1500\,000)$
3	$a_3 = 17\,750\,000 + 2 \times (-1500\,000)$
4	$a_4 = 17\,750\,000 + 3 \times (-1500\,000)$
5	$a_5 = 17\,750\,000 + 4 \times (-1500\,000)$

القانون العام للمتتاليات الحسابية

يُحسب الحد النوني لمتتالية حسابية بالقانون

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية، وَ d أساسها.

مثـــال 2

حساب الحد النوني لمتتالية حسابية

جد الحد العاشر في المتتالية الحسابية ... ,32, 25, 18, 11, 4

الخطوة 1 جِد أساس المتتالية $d = 25 - 32 = -7$

الخطوة 2 احسب الحد العاشر باستعمال القانون.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

$a_{10} = 32 + (10-1)(-7)$ عوّض.

$= -31$ بسّط.

الحد العاشر في هذه المتتالية هو -31.

تحقَّق أكمل المتتالية.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a_n	32	25	18	11	4	−3	−10	−17	−24	−31

حاولْ جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

أ) $-3, -5, -7, -9, \ldots$

ب) $9.2, 9.15, 9.1, 9.05, \ldots$

مثال 3 إيجاد الحدود الناقصة

جِد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية $11, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, -17$.

الخطوة 1 جِد الأساس.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون.

$-17 = 11 + (5-1)d$ عوّض.

$-7 = d$ بسّط.

الخطوة 2 جِد الحدود الناقصة باستعمال $a_1 = 11$ و $d = -7$.

$a_2 = 11 + (2-1)(-7) = 4$

$a_3 = 11 + (3-1)(-7) = -3$

$a_4 = 11 + (4-1)(-7) = -10$

حاولْ جِد الحدود الناقصة في المتتالية الحسابية $2, \blacksquare, \blacksquare, \blacksquare, 0$.

بما أن الفروق بين كل حد وسابقه في متتالية حسابية متساوية، فإن معرفة حدَّين تكفي لإيجاد الأساس.

مثال 4 إيجاد الحد النوني لمتتالية حسابية بمعرفة حدَّين

جِد الحد السادس في متتالية حسابية، علمًا بأن $a_9 = 120$ و $a_{14} = 195$.

الخطوة 1 جِد الأساس.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ القانون العام.

$a_{14} = a_1 + (14-1)d = a_1 + 13d$ القانون.

$a_9 = a_1 + (9-1)d = a_1 + 8d$ القانون.

$a_{14} - a_9 = 5d$ اطرح.

$195 - 120 = 5d$ عوّض.

$15 = d$ حُلّ.

الخطوة 2 جِد a_1.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	القانون.
$120 = a_1 + (9-1)(15)$	عوِّض.
$120 = a_1 + 120$	بسِّط.
$0 = a_1$	حُلّ.

الخطوة 3 جِد الحد السادس a_6.

$a_n = a_1 + (n-1)d$	القانون.
$a_6 = 0 + (6-1)15$	عوِّض.
$= 75$	بسِّط.

الحد السادس في هذه المتتالية هو 75.

حــاولْ جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

أ) $a_3 = -121$ وَ $a_2 = -133$

ب) $a_8 = 13$ وَ $a_3 = 20.5$

كثيرًا ما يتطلَّب حل مسألة حساب مجموع عدد من الحدود الأولى لمتتالية حسابية، كأن تحتاج إلى مجموع الحدود العشرة الأولى. إذا رمزت بِـ S_n إلى مجموع الحدود الأولى حتى الرتبة n أي

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n$$

فإن

$$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$$

مجموع الحدود الأولى في متتالية حسابية

بالكلمات	بالأعداد	في الجبر
مجموع الحدود الأولى في متتالية حسابية هو ناتج ضرب عدد هذه الحدود في متوسِّط الحدَّين الأول والأخير.	مجموع $2+4+6+8+10$ هو $S_5 = 5\left(\frac{2+10}{2}\right) = 5(6) = 30$	$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ حيث n عدد الحدود وَ a_1 الحد الأول وَ a_n الحد الأخير.

مثــــال 5 إيجاد قيمة مجموع جزئي لمتتالية حسابية

جد المجموع المطلوب في كل متسلسلة حسابية.

أ) S_{15} للمتتالية

$25, 12, (-1), (-14), ...$

الخطوة 1 جِد الأساس.

$d = 12 - 25 = -13$

ب) S_{12} لمتتالية حسابية حدها النوني $a_n = 3 + 4n$.

الخطوة 1 جِد الحدَّين a_1 وَ a_{12}.

$a_1 = 3 + 4 \times 1 = 7$

$a_{12} = 3 + 4 \times 12 = 51$

الخطوة 2 جِد الحد a_{15}

$$a_{15} = 25 + (15-1)(-13)$$
$$= -157$$

الخطوة 3 جِد S_{15}

$$S_{15} = n\left(\frac{a_1 + a_{15}}{2}\right)$$
$$= 15\left(\frac{25 + (-157)}{2}\right)$$
$$= 15\left(\frac{-132}{2}\right) = -990$$

الخطوة 2 جِد S_{12}

$$S_{12} = n\left(\frac{a_1 + a_{12}}{2}\right)$$
$$= 12\left(\frac{7+51}{2}\right)$$
$$= 348$$

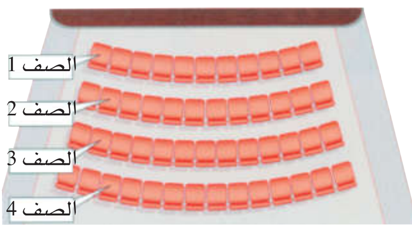
حــاولْ **جِد المجموع المطلوب لكل متتالية حسابية.**

أ) S_{16} للمتتالية ... $12, 7, 2, (-3),$

ب) S_5 للمتتالية التي حدها النوني $a_n = 50 - 20n$

مثـــال 6 تطبيق على المسارح

في الجناح الأوسط من أحد المسارح العالميَّة، تُشكِّل أعداد المقاعد في الصفوف الـ 14 الأولى متتالية حسابية.



أ) **كم مقعدًا في الصف الـ 14 ؟**

لاحظ أن عدد المقاعد يزداد واحدًا بين صف وآخر.

اكتب القانون مستعملاً $a_1 = 11$ وَ $d = 1$.

$a_n = a_1 + (n-1)d$ اكتب قانون الحد النوني.

$a_{14} = 11 + (14-1)(1)$ عوِّض.

$= 11 + 13$

$= 24$ بسِّط.

في الصف الرابع عشر 24 مقعدًا.

ب) **كم مقعدًا في الصفوف الـ 14 الأولى؟**

جِد S_{14} باستعمال قانون مجموع الحدود الأولى في متتالية حسابية.

$S_n = n\left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right)$ القانون.

$S_{14} = 14\left(\frac{11+24}{2}\right)$ عوِّض.

$= 14\left(\frac{35}{2}\right) = 245$ بسِّط.

في الصفوف الـ 14 الأولى 245 مقعدًا.

حــاولْ **ماذا لو... ؟** افترض أن عدد المقاعد في كل صف، وابتداء من الثاني، يزيد مقعدين على الصف الذي أمامه.

أ) كم مقعدًا في الصف الـ 14؟

ب) كم مقعدًا في الصفوف الـ 14 الأولى؟

التمارين

التواصل في الرياضيات

1 اشرح كيف تجد الحد النوني للمتتالية $-4, 2, 8, 14, \ldots$

2 أوضح لماذا يتضمّن مقدار الحد النوني $(n-1)d$ وليس nd .

3 أوضح الفرق بين متتالية حسابية ومتتالية هندسية.

تمارين موجّهة

حدّد إن كانت كل متتالية حسابية أو لا، جِد الأساس والحد التالي.

4 $46, 39, 32, 25, 18, \ldots$

5 $28, 21, 15, 10, 6, \ldots$

جِد الحد الثامن في كل متتالية حسابية.

6 $3, 8, 13, 18, \ldots$

7 $-3.2, -3.4, -3.6, -3.8, \ldots$

جِد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.

8 $13, ■, ■, 25, \ldots$

9 $9, ■, ■, ■, 37, \ldots$

10 $1.4, ■, ■, ■, -1, \ldots$

جِد الحد التاسع في كل متتالية حسابية.

11 $a_5 = 19,\ a_4 = 27$

12 $a_4 = 12.6,\ a_3 = 12.2$

13 $a_6 = -11,\ a_3 = -5$

جِد المجموع المطلوب.

14 S_{15} للمتتالية $5, 9, 13, 17, \ldots$

15 S_{12} للمتتالية التي حدها النوني $a_n = -2 + 6n$

16 **أجور** التحق بلند بشركة معلوماتية للعمل فيها بمرتَّب سنوي مقداره 26 000 000 دينار على أن يزداد مرتَّبه 1 250 000 دينار سنويًّا.

أ) كم سيبلغ مرتَّبه في السنة السادسة؟

ب) كم سيكون مجموع ما يتقاضاه من أجور في السنوات الست الأولى؟

تمارين وتطبيقات

حدّد إن كانت المتتالية الحسابية أو لا. إذا كانت حسابية، جِد الأساس والحد التالي.

17 $288, 144, 72, 36, 18, \ldots$

18 $-2, -12, -22, -32, -42, \ldots$

جِد الحد الحادي عشر في كل متتالية حسابية.

19 $12, 11.9, 11.8, 11.7, \ldots$

20 $-3.0, -2.5, -2.0, -1.5, \ldots$

جِد الحدود الناقصة في كل متتالية حسابية.

21 $77, ■, ■, ■, 33, \ldots$

22 $-29, ■, ■, -2, \ldots$

جِد الحد الثاني عشر في كل متتالية حسابية.

23 $a_5 = 16.2,\ a_4 = 18.4$ **24** $a_8 = 46,\ a_4 = -2$ **25** $a_{25} = -58,\ a_{22} = -49$

جِد المجموع المطلوب.

26 S_{15} للمتتالية $-18, -16, -14, \ldots$ **27** S_{14} للمتتالية التي حدَّها النوني $a_n = 14 - \frac{1}{2}n$

28 **استهلاك** اشترت سميرة ثوبًا بالتقسيط. دفعت للبائع 15000 دينار في الأسبوع الأول، واتفقت معه على زيادة القسط 5000 دينار كل أسبوع.

أ كم ستدفع في الأسبوع التاسع؟

ب كم سيكون مجموع دفعاتها عند نهاية الأسبوع التاسع؟

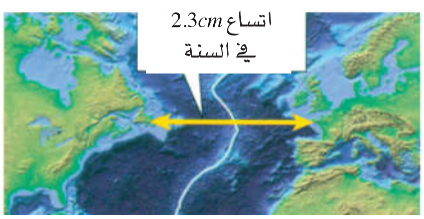
29 **عمارة** تم إنشاء هرم اللوفر في باريس أمام متحف اللوفر وذلك في ثمانينيات القرن العشرين. شُيِّد هذا الهرم باستعمال ألواح من الزجاج. يتألَّف الهرم من مستويات. يتضمن المستوى الأعلى 4 ألواح ويزداد عدد الألواح 4، بالانتقال من مستوى إلى المستوى الأدنى منه.

أ اكتب، بدلالة n، عدد الألواح في المستوى n.

ب لو كان الهرم يتألف من 18 مستوى، فكم سيكون عدد ألواح الزجاج كلها؟

ج في الحقيقة، تم استعمال عدد من الألواح يقلّ 11 لوحًا عمَّا حسبته، بسبب إنشاء مدخل إلى الهرم. كم لوح زجاج يتضمَّن هرم اللوفر؟

30 **جيولوجيا** تبتعد قارَّة أمريكا الشمالية سنويًّا عن القارة الأوروبية.



أ كم ستبتعد أمريكا الشمالية عن أوروبا بعد 50 سنة؟

ب بعد كم سنة سيكون البعد بين القارَّتَيْن قد ازداد كيلومترًا واحدًا على الأقل؟

نظرة إلى الوراء

اذكر إن كانت الدالّة الأسّية دالّة نمو أو دالّة تراجع.

31 $f(x) = 1.25(0.75)^x$ **32** $f(x) = 1.43(5.32)^x$ **33** $f(x) = 0.92(0.64)^x$

نظرة إلى الأمام

34 الحد الأول في متتالية هو 2. كل حد آخر هو ضعف الحد الذي يسبقه. اكتب الحدود العشرة الأولى من هذه المتتالية.

الدرس 2

المتتاليات الهندسية
Geometric Sequences

الأهداف

- يُميِّز المتتالية الهندسية.
- يجد الحد المطلوب في متتالية هندسية.
- يجد المجاميع الجزئية لمتتالية هندسية.

المفردات
Vocabulary

المتتالية الهندسية
Geometric Sequence

لماذا؟

يُمكن لمخطِّطي المباريات الرياضية استعمال المتتاليات الهندسية لتحديد عدد المباريات في كل دور.

فازت سيرينا ولياس، من بين 128 متبارية، في بطولة كرة المضرب للسيدات في ويمبلدون Wimbledon سنة 2003. في نهاية كل مباراة بين لاعبتين، تتابع الفائزة اللعب بينما تخرج الخاسرة من الدورة. هذا يعني أن عدد المتباريات ينخفض إلى النصف في نهاية كل دورة. يُمكن التعبير عن أعداد المتباريات الباقيات بعد كل دورة باستعمال متتالية هندسية. في **متتالية هندسية Geometric sequence** ، تكون النسبة بين كل حد والحد الذي يسبقه ثابتة ومختلفة عن 1. تُسمّى هذه النسبة **أساس** المتتالية Common ratio . أساس المتتالية الهندسية أعلاه هو $\frac{1}{2}$.

الدورة	1	2	3	4
العدد	128	64	32	16
النسب		$\frac{64}{128}=\frac{1}{2}$	$\frac{32}{64}=\frac{1}{2}$	$\frac{16}{32}=\frac{1}{2}$

لكي تُحدِّد إن كانت متتالية ما متتالية هندسية، احسب نِسبة كل حدّ إلى سابقه. إن تساوت هذه النسب، كانت المتتالية هندسية.

مثـــال 1 تمييز المتتاليات الهندسية

حدِّد إن كانت المتتالية هندسية أو حسابية أو غير ذلك. إذا كانت هندسية، حدِّد الأساس والحد الذي يلي آخر حد معطى.

أ 8, 12, 18, 27, ...

8 12 18 27

الفروق: 4 6 9

النسب: $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{3}{2}$

المتتالية هندسية.

الأساس $r=\frac{3}{2}$

الحد الذي يلي: 40.5

ب 8, 16, 24, 32, ...

8 16 24 32

الفروق: 8 8 8

النسب: 2 $\frac{3}{2}$ $\frac{4}{3}$

المتتالية حسابية.

الأساس $d=8$.

الحد الذي يلي: 40

ج 6, 10, 15, 21, ...

6 10 15 21

الفروق: 4 5 6

النسب: $\frac{5}{3}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{7}{5}$

المتتالية ليست حسابية ولا هندسية.

حـــاولْ

حدِّد إن كانت المتتالية هندسية أو حسابية أو غير ذلك. إذا كانت هندسية، حدِّد الأساس والحد الذي يلي آخر حد مُعطى.

أ $\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{36}, \frac{1}{108}, \ldots$

ب 1.7, 1.3, 0.9, 0.5, ...

ج −50, −32, −18, −8, ...

كل حد في المتتالية الهندسية التي وردت في مطلع الدرس، هو ناتج ضرب الحد الأول في قوة من قوى الأساس، كما يُبيّن ذلك الجدول التالي:

عدد اللاعبات في كل دورة في ويمبلدون					
الدورة	1	2	3	4	n
عدد اللاعبات	128	64	32	16	a_n
القاعدة	$a_1 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^0$	$a_2 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^1$	$a_3 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$a_4 = 128\left(\frac{1}{2}\right)^3$	$a_n = 128\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

القانون العام للمتتاليات الهندسية

يُحسب الحد النوني a_n لمتتالية هندسية بالقانون

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية، وَ r أساسها.

لإيجاد الأساس في متتالية هندسية، اقسم حدًّا غير الحد الأول على سابقه. ناتج القسمة هو الأساس.

مثـــــال 2 إيجاد الحد النوني في متتالية هندسية

جِد الحد التاسع في المتتالية الهندسية ... ,80−, 40, 20−, 10, 5−

الخطوة 1 احسب الأساس باستعمال القانون. $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{10}{-5} = -2$

الخطوة 2 احسب الحد التاسع باستعمال القانون.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ القانون.

$a_9 = -5(-2)^{9-1}$ عوِّض.

$a_9 = -5(256) = -1280$ بسِّط.

الحد التاسع في هذه المتتالية هو 1280−.

تحقّق أكمل المتتالية.

$a_5 = -80$

$a_6 = -80(-2) = 160$

$a_7 = 160(-2) = -320$

$a_8 = -320(-2) = 640$

$a_9 = 640(-2) = -1280$ ✓

حـــاولْ **جِد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.**

أ) $\frac{3}{4}, -\frac{3}{8}, \frac{3}{16}, -\frac{3}{32}, \frac{3}{64}, \ldots$

ب) $0.001, 0.01, 0.1, 1, 10, \ldots$

مثـــــال 3

إيجاد الحد النوني لمتتالية هندسية بمعرفة حدَّيْن

جِد الحد العاشر في متتالية هندسية علمًا بأن $a_5 = 96$ وَ $a_7 = 384$.

الخطوة 1. جِد الأساس.

$a_n = a_1 r^{n-1}$ القانون العام.

$a_7 = a_1 r^{7-1} = a_1 r^6$ عوِّض عن n بقيمته.

$a_5 = a_1 r^{5-1} = a_1 r^4$ عوِّض عن n بقيمته.

$\frac{a_7}{a_5} = \frac{a_1 r^6}{a_1 r^4} = r^2$ اقسم.

$\frac{384}{96} = r^2$ عوِّض.

$4 = r^2$ بسِّط.

$\pm 2 = r$ حُلَّ.

الخطوة 2. جِد a_1 .

ادرس كل حالة من حالتَي r على حدة.

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	القانون.
$96 = a_1 (2)^{5-1}$	$96 = 6(-2)^{5-1}$	عوِّض.
$6 = a_1$	$6 = a_1$	بسِّط.

الخطوة 3. اكتب قاعدة المتتالية، واستعملها لإيجاد a_{10} .

$a_n = a_1 r^{n-1}$	$a_n = a_1 r^{n-1}$	القانون.
$a_n = 6(2)^{n-1}$	$a_n = 6(-2)^{n-1}$	عوِّض.
$a_{10} = 6(2)^{10-1}$	$a_{10} = 6(-2)^{10-1}$	عوِّض عن n بـ 10 .
$a_{10} = 3072$	$a_{10} = -3072$	بسِّط.

الحد العاشر في هذه المتتالية هو 3072 أو -3072.

> **انتبــه!**
> عندما تُعطى حدَّين من حدود المتتالية، تأكد من أن تأخذ في الحسبان القيمة الموجبة والقيمة السالبة لـ r إذا كان ذلك متاحًا.

حـــاولْ **جِد الحد السابع في كل متتالية هندسية.**

أ) $a_4 = -8$ وَ $a_5 = -40$

ب) $a_2 = 768$ وَ $a_4 = 48$

كثيرًا ما يتطلب حل مسألة حساب مجموع عدد من الحدود الأولى لمتتالية هندسية كأن تحتاج إلى مجموع الحدود العشرة الأولى. إذا رمزت بِـ S_n إلى مجموع الحدود الأولى حتى الرتبة n أي

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n$$

فإن

$$S_n = a_1 \frac{1-r^n}{1-r}$$

مجموع الحدود الأولى في متتالية هندسية

يُحسب مجموع الحدود الأولى (S_n) في متتالية هندسية $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, \dots$ باستعمال القانون:

$$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right);\ r \neq 1$$

حيث a_1 هو الحد الأول للمتتالية وَ r أساسها.

مثال 4 إيجاد مجموع جزئي لمتتالية هندسية

جِد المجموع المطلوب في كل متتالية هندسية.

أ S_7 في المتسلسلة ... ,(24−) ,12 ,(6−) ,3

الخطوة 1 جِد النسبة المشتركة.

$$r=\frac{a_2}{a_1}=\frac{-6}{3}=-2$$

الخطوة 2 جِد S_7 حيث $a_1=3$ وَ $r=-2$ وَ $n=7$

$$S_n=a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_7=3\left(\frac{1-(-2)^7}{1-(-2)}\right)$$

$$=3\left(\frac{1-(-128)}{3}\right)=129$$

ب S_5 لمتتالية هندسية حدها النوني $a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$

الخطوة 1 جِد الحد a_1.

$$a_1=\left(\frac{1}{3}\right)^{1-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^0=1$$

الخطوة 2 جِد S_5.

$$S_n=a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$$

$$S_5=1\left(\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\left(\frac{1}{3}\right)}\right)$$

$$=\frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{2}{3}}\approx 1.49$$

حاولْ جِد المجموع المطلوب في كل متتالية هندسية.

أ S_8 للمتتالية $2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$

ب S_6 للمتتالية التي حدها النوني $a_n=(-3)(2)^{n-1}$

مثال 5 تطبيق في الرياضة

اشتركت في إحدى ألعاب كرة المضرب 128 متبارية، ينخفض عدد المباريات إلى النصف بعد نهاية كل دور. كم مباراة جرت في هذه الألعاب؟

الخطوة 1 اكتب متتالية.

$n=$ عدد الأدوار

$a_k=$ عدد المباريات في الدور k

$S_n=$ العدد الكلّي للمباريات في n دورًا.

$$a_n=64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

عدد المباريات في الدور الأول هو $\frac{128}{2}=64$. أساس المتتالية هو $\frac{1}{2}$ لأن عدد المتباريات في كل دور هو نصف عددهن في الدور السابق.

الخطوة 2 جِد عدد الأدوار.

$1=64\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ يتضمّن الدور الأخير مباراة واحدة.

$\frac{1}{64}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ اعزل الجزء الأسّي من المقدار بالقسمة على 64.

$\left(\frac{1}{2}\right)^6=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ اكتب $\frac{1}{64}$ على صورة قوة من قوى $\frac{1}{2}$.

$6=n-1$ ساوِ بين الأسّيْن.

$7=n$ بسِّط.

الخطوة 3 جِد العدد الكلّي للمباريات.

$S_7=64\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^7}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)=127$ استعمل قانون مجموع المتتالية الهندسية

إذن تضمَّنت الألعاب 127 مباراة.

GRADE12-CHAP-4-Adabi(2)-13 2/12/15 1:18 PM Page 14

حـــاولْ تدفع شركة كبرى 84000000 دينار سنويًّا كإيجار لمقرّها. يزداد هذا المبلغ 8% سنويًّا. كم تدفع الشركة على مدى 6 سنوات؟

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1. اشرح كيف تجد الحد النوني للمتتالية الهندسية ... ,108 ,36 ,12 ,4
2. أوضح لماذا يتضمّن مقدار الحد النوني $r^{(n-1)}$ وليس r^n.
3. متى تتزايد حدود متتالية هندسية حدودها موجبة؟ ومتى تتناقص؟

تمارين موجّهة

حدِّد إن كانت كل متتالية هندسية أو لا. إذا كانت هندسية، جِد الأساس والحد التالي.

4. $320, 80, 20, 5, \ldots$
5. $\frac{1}{2}, 1, 2, 3, \ldots$

جِد الحد العاشر في كل متتالية هندسية.

6. $2, 6, 18, 54, 162, \ldots$
7. $5000, 500, 50, 5, 0.5, \ldots$

جِد الحد السادس في المتتالية الهندسية المعرَّفة بحدَّيْن.

8. $a_5 = -4,\ a_4 = -12$
9. $a_5 = 108,\ a_2 = 4$
10. $a_5 = 12,\ a_3 = 3$

جِد المجموع المطلوب.

11. S_8 للمتتالية $2, 0.2, 0.02, \ldots$
12. S_8 للمتتالية التي حدها النوني $a_n = (-3)^{n-1}$
13. **أجور** مدرِّس لغة أجره في سنته الأولى 8000000 دينار. يزداد هذا الأجر بنسبة 5% سنويًّا. كم سيكون أجره في عامه العشرين من الخدمة؟ كم سيكون قد تقاضى خلال تلك الفترة؟

تمارين وتطبيقات

حدِّد إن كانت المتتالية هندسية أو حسابية أو غير ذلك. إذا كانت هندسية، جِد الأساس والحد التالي.

14. $-36, -49, -64, -81, \ldots$
15. $-2, -6, -18, -54, \ldots$

جِد الحد التاسع في كل متتالية هندسية.

16. $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{1}{50}, \frac{1}{250}, \frac{1}{1250}, \ldots$
17. $3, -6, 12, -24, 48, \ldots$

جِد الحد السابع في المتتالية الهندسية المعرَّفة بحدَّيْن.

18. $a_5 = 162,\ a_4 = 54$
19. $a_6 = -100,\ a_4 = -4$

جِد المجموع المطلوب في كل متتالية هندسية.

20 S_6 للمتتالية ... ,5, 25, 125

21 S_7 للمتتالية التي حدّها النوني $a_n = 8(10)^{n-1}$

22 **أجداد** لك والدان، وجدّان وجدّتان، وأربعة آباء جدود وأربع أمهات جدّات.

أ ما عدد أسلافك خلال 6 أجيال قبلك؟ خلال 21 جيلاً؟

ب **ماذا لو...؟** كيف تتغيّر قاعدة حساب عدد الجدود والجدات إذا كنت أنت الجيل الأول؟

23 **أقساط جامعية** عند ولادة روناك قرّر جدّها وجدّتها أن يدفعا عنها أقساط الانتساب إلى الجامعة. أعطياها 50 دينارًا يوم مولدها، وقررا أن يدفعا لها في كل سنة ضعف ما دفعاه في السنة السابقة. ما المبلغ الذي تجمّع لدى روناك عند بلوغها 18 سنة؟ عند بلوغها 21 سنة؟

24 **تكنولوجيا** تلقّيت بالبريد الإلكتروني رسالة تمنّى لك فيها مرسلها الحظ السعيد، وطلب إليك أن ترسلها إلى 5 أصدقاء، طالبًا إليهم أن يرسلها كل منهم بدوره إلى 5 أصدقاء، وهكذا... ما عدد هذه الرسائل بعد 10 مستويات.

25 **تمويل** استأجرت إحدى المؤسسات مقرًّا لها بمبلغ قدره 000 750 دينار شهريًّا خلال السنة الأولى، على أن يزداد هذا المبلغ 10% سنويًّا بعد السنة الأولى.

أ اكتب متتالية تمثّل ما تدفعه المؤسسة سنويًّا على مدى 5 سنوات.

ب جد مجموع ما دفعته المؤسسة على مدى 10 سنوات.

26 **طب** سجّل أحد المستشفيات خلال موجة من انتشار الإنفلونزا دخول 16 حالة في الأسبوع الأول، وَ 56 حالة في الأسبوع الثاني، وَ 196 حالة في الأسبوع الثالث.

أ اكتب متتالية هندسية تمثّل أعداد حالات الإصابة بالإنفلونزا.

ب إذا استمر ازدياد حالات الإصابة على هذا المنوال، ففي أي أسبوع يبلغ مجمل عدد الحالات أكبر من 10000 إصابة؟

27 **اكتب** ما الذي يحدث لحدود متتالية هندسية لو أن حدّها الأول تضاعف 3 مرات؟ ما الذي يحدث لمجموع حدودها الأولى؟

نظرة إلى الوراء

جِد الحدود العشرة الأولى في كل متتالية حسابية.

28 ... ,78, 65, 52, 39, 26

29 ... ,1.7, 7.3, 12.9, 18.5, 24.1

نظرة إلى الأمام

جِد مشتقّة كل دالّة.

30 $f(x) = 4x^3$

31 $f(x) = x^{-3}$

32 $f(x) = 2x^7$

GRADE12-CHAP-5-Adabi (2)-13 2/12/15 1:23 PM Page 3

الفصل

5

التفاضل والتكامل

Differential and Integrals

الدروس

الدرس 1

تطبيقات الاشتقاق في الاقتصاد
Applications of Differentiation to Economics

لماذا؟

تُستعمل الدوال لإنشاء نماذج في الاقتصاد مثل دالَّة العرض ودالَّة الطلب ودالَّة الكلفة ودالَّة الربح وغيرها كثير. يستعمل الاقتصاديون هذه الدوال ومشتقَّاتها لدراسة هذه النماذج واستخلاص الاستنتاجات المناسبة.

الأهداف

- يُطبِّق حساب التفاضل لإيجاد القياسات الهامشية والمرونة في الاقتصاد.
- يستعمل الاشتقاق للبحث عن القيم الكبرى والقيم الصغرى.

المفردات Vocabulary

القياسات الهامشية Marginal Measures

المرونة Elasticity

القيمة الكبرى المحلّية Local maximum

القيمة الصغرى المحلّية Local minimum

قاعدة المشتقّة الأولى Test of first derivative

تعلَّمت في الصف الحادي عشر كيف تجد مشتقَّة دالة. تذكَّر أن مشتقَّة الدالَّة هي دالَّة يتم إيجادها باستعمال المشتقّات الأساسية وقواعد الاشتقاق. يُبيّن الجدول أدناه المشتقّات الأساسية الأكثر تداولاً في الصفَّين الحادي عشر والثاني عشر.

الدالَّة	المشتقَّة
$f(x)=c$ ، c عدد حقيقي	$f'(x)=0$
$f(x)=x^n$	$f'(x)=nx^{n-1}$ ، n عدد حقيقي
$f(x)=\frac{1}{x}$	$f'(x)=-\frac{1}{x^2}$
$f(x)=\ln x$	$f'(x)=\frac{1}{x}$
$f(x)=\ln(g(x))$	$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$
$f(x)=x$	$f'(x)=1$
$f(x)=\sqrt{x}$	$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x)=e^x$	$f'(x)=e^x$
$f(x)=e^{g(x)}$	$f(x)=g'(x)e^{g(x)}$

كما يُبيّن الجدول التالي بعض قواعد الاشتقاق.

اسم القاعدة	المشتقّة
قاعدة الضرب في عدد	$(af(x))'=af'(x)$
قاعدة مشتقَّة المجموع	$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
قاعدة مشتقَّة الفرق	$(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$
قاعدة الضرب	$(f(x)g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$
قاعدة القسمة	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
قاعدة دالَّة الدالَّة	$(f(g(x)))'=g'(x)f'(g(x))$

مثــــال 1 حساب المشتقّات

جِد مشتقّة كل دالة:

أ $f(x)=3x^4$ ب $f(x)=5x^4-2x^3$ ج $f(x)=\frac{3}{x}$ د $f(x)=e^{-2x}$

الحل

أ $f'(x)=(3x^4)'=3(x^4)'=3(4x^3)=12x^3$

ب $f'(x)=(5x^4-2x^3)'=(5x^4)'-(2x^3)'=5(x^4)'-2(x^3)'$
$=5(4x^3)-2(3x^2)=20x^3-6x^2$

ج $f'(x)=\left(\frac{3}{x}\right)'=3\left(\frac{1}{x}\right)'=3\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{3}{x^2}$

د $f'(x)=(e^{-2x})'=(-2x)'e^{-2x}=(-2)e^{-2x}=-2e^{-2x}$

حــاولْ جِد مشتقّة كل من الدوال التالية:

أ $f(x)=5x^7$ ب $f(x)=3x^6-3x^2$ ج $f(x)=\frac{-2}{x}$ د $f(x)=e^{3x}$

القياسات الهامشية في الاقتصاد Marginal Measures in Economics

يُمكن التمييز، في نشاطات المؤسَّسات الصناعية والتجارية، بين ثلاثة أشياء: **الأكلاف** Cost (وهي ما تتكلَّف المؤسَّسة لكي تقوم بعملها) و**المداخيل** Revenues (وهي ما تحصل عليه المؤسسة نتيجة عملها) و**الأرباح** Profits (وهي ما يبقى للمؤسسة بعد طرح الأكلاف من المداخيل).

تعلّمت في الصف الحادي عشر أن الحديث عن قياس هامشي يعود إلى الاشتقاق: **الكلفة الهامشية** Marginal cost هي مشتقَّة دالَّة الكلفة؛ **المدخول الهامشي** Marginal revenue هو مشتقَّة دالَّة المدخول؛ **الربح الهامشي** Marginal Profit هو مشتقَّة دالَّة الربح. تذكَّر أن القياس الهامشي يعبِّر عن التغيُّر الذي يُصيب القياس الكلّي في حال ازدياد الكمّية وحدة واحدة. مثال: الكلفة الهامشية عند مستوى معيّن من الإنتاج، 500 مثلاً، هي التغيُّر الذي يُصيب الكلفة الكلّية إذا زاد الإنتاج وحدة واحدة أي إذا أصبح 501 .

يتحدَّد المدخول R بعاملَيْن: **عدد الوحدات المبيعة** Q و**سعر الوحدة الواحدة** P ، بحيث يكون $R=P\times Q$. أما الكلفة فتتحدَّد بأمرَيْن أيضًا: **الكلفة المتغيِّرة** Variable cost وهي دالَّة بدلالة عدد الوحدات المنتجة، و**الكلفة الثابتة** Fix cost وهي لا تتغيَّر بتغيُّر عدد هذه الوحدات.

مثــــال 2 إيجاد دالَّة الربح الهامشي

تبيع مؤسسة الفارس علبًا من الزيتون من نوع واحد. دالَّة الطلب على هذا النوع من الزيتون هي

$$P(Q)=20000-\frac{Q}{10}$$

(تذكَّرأن السعر يتغيَّر بتغيُّر الطلب على علب الزيتون وفقًا لقانون العرض والطلب) حيث يرمز Q إلى عدد العلب المبيعة ويرمز P إلى ثمن العلبة الواحدة. من ناحية أخرى، دالَّة الكلفة هي

$$C(Q)=50000+3000Q$$

أ ماذا يُمثِّل العدد 50 000 في دالَّة الكلفة؟ ماذا يُمثِّل العدد 3 000 في هذه الدالَّة؟

ب جِد دالَّة الربح.

ج جِد دالَّة الربح الهامشي.

الحل

أ يُمثِّل العدد 50 000 في دالَّة الكلفة ما تتكلَّفه المؤسسة من كلفة تشغيل، أيًّا يكن عدد العلب المبيعة، إنه الكلفة الثابتة. أما العدد 3 000 فيمثِّل كلفة شراء علبة واحدة.

ب الربح هو ناتج طرح الكلفة من المدخول، دالَّة المدخول هي:

$$R(Q)=P\times Q=20\,000Q-\frac{Q^2}{10}$$

مما يجعل دالَّة الربح:

$$S(Q)=20\,000Q-\frac{Q^2}{10}-(50\,000+3000Q)$$

$$S(Q)=17\,000Q-\frac{Q^2}{10}-50\,000$$

ج دالَّة الربح الهامشي هي $S'(Q)=17000-\frac{Q}{5}$

حـــاولْ تبيع مؤسسة الفرات علبًا من منّ السماء من نوع واحد. دالَّة الطلب على هذا النوع من العلب هي

$$P(Q)=17000-\frac{Q}{20}$$

(تذكَّر أن السعر يتغيَّر بتغيُّر الطلب وفقًا لقانون العرض والطلب) حيث يرمز Q إلى عدد العلب المبيعة، ويرمز P إلى ثمن العلبة الواحدة. من ناحية أخرى، دالَّة الكلفة هي:

$$C(Q)=30\,000+8\,000Q$$

أ ماذا يُمثل العدد 30 000 في دالَّة الكلفة؟ ماذا يُمثِّل العدد 8 000 في هذه الدالَّة؟

ب جِد دالَّة الربح.

ج جِد دالَّة الربح الهامشي.

المرونة في الاقتصاد Elasticity in Economics

يُقال عن سلعة إنها **مرنة** Elastic إذا ازداد الطلب عليها أو قلّ بشكل ملحوظ نتيجة لانخفاض سعرها أو ارتفاعه. يقيس الاقتصاديون مرونة سلعة انطلاقًا من دالَّة الطلب عليها. فإذا كانت $P(Q)$ دالَّة الطلب فإن المرونة هي $e=\frac{P}{Q}\times\frac{1}{P'(Q)}$. ويعتبرون أن السلعة تكون مرنة إذا كان $|e|>1$، وغير مرنة إذا كان $|e|<1$.

مثـــال 3 **إيجاد مرونة سلعة**

دالَّة الطلب على إحدى السلع هي: $P(Q)=50+Q-Q^2$. جد مرونة هذه السلعة عند $Q=4$.

الحل

$P(4)=50+4-4^2=50+4-16=50-12=38$. من ناحية أخرى، $P'(Q)=1-2Q$

وَ $P'(4)=1-2\times4=1-8=-7$، ينتج من ذلك $e=\frac{P}{Q}\times\frac{1}{P'(Q)}=\frac{38}{4(-7)}=-\frac{38}{28}$

وَ $|e|=\left|-\frac{38}{28}\right|=\frac{38}{28}>1$، مما يُبيّن أن السلعة مرنة.

حـــاولْ دالَّة الطلب على سلعة هي $P(Q)=10+2Q-3Q^3$. ما مرونة هذه السلعة عند $Q=10$؟

البحث عن القيم القصوى Optimization

يُشكِّل البحث عن القيم القصوى التطبيق الأساسي والأكثر استعمالاً للاشتقاق. مثال على ذلك، تحديد عدد العاملين في مؤسسة بحيث تبلغ أرباحها قيمتها القصوى، أو تخفيض عدد أولئك الموظفين بحيث تنخفض الكلفة إلى حدها الأدنى.

من أجل ذلك، يُقدِّم حساب التفاضل إلينا قاعدة تُسمّى **قاعدة المشتقة الأولى**.

قاعدة المشتقَّة الأولى

إذا كان للدالَّة $f(x)$ قيم قصوى (كبرى أو صغرى) عند $x=c$ فإن $f'(c)$ غير معرّف أو $f'(c)=0$.

إذن، للبحث عن قيم x التي يُمكن لها أن توفِّر قيمة قصوى للدالَّة، ابحث عن قيم x التي تُحقِّق $f'(x)=0$.

مثـــال 4 استعمل معطيات المثال 2 لتحديد الكمّية التي تؤمِّن للمؤسَّسة الحد الأعلى من الربح. ما سعر العلبة الذي يُحقِّق الربح الأعلى؟ وكم يساوي هذا الربح؟

الحل

دالَّة الربح في المثال 2 هي

$$S(Q)=17\,000Q-\frac{Q^2}{10}-50\,000$$

لتحديد الكمِّيّة التي تومِّن للمؤسَّسة الحد الأعلى من الربح، ابدأ بحساب المشتقَّة. المشتقَّة هي

$$S'(Q)=17\,000-\frac{Q}{5}.$$

بعد ذلك، حُلِّ المعادلة $S'(Q)=0$ تحصل على

$$Q=17\,000\times5=85\,000.$$

إذن، يؤمِّن بيع 85 000 علبة من الزيتون الحد الأعلى للربح.

سعر علبة الزيتون الذي يؤمِّن الحد الأعلى من الربح هو

$$P(Q)=20000-\frac{Q}{10}=20000-\frac{85\,000}{10}=20000-85\,000=11500$$

أي 500 11 دينار. الحد الأعلى للربح هو

$$S(Q)=17000\times 85000-\frac{85000^2}{10}-50000=722\,450\,000$$

أي 000 450 722 دينار.

حــــاولْ يملك هوشيار شاحنة للنقل البرّي. يدفع هوشيار 000 5 دينار في الساعة أجرًا للسائق. تبلغ كلفة تشغيل الشاحنة $\frac{v^2}{50}$ دينارًا في الكيلومتر الواحد، حيث يرمز v إلى سرعة الشاحنة بالكيلومتر في الساعة. بأي سرعة تكون كلفة الشاحنة أقلّ ما يُمكن؟

التمــــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1. اشرح العلاقة بين المدخول والكلفة والربح.
2. إذا كانت الدالَّة $C(Q)=0.025Q^3-0.05Q^2+12.4Q+22$ هي دالَّة الكلفة لإنتاج سلعة معيّنة بدلالة الكمّية المنتجة Q، اكتب دالَّة $Av(Q)$، بدلالة Q، تمثِّل الكلفة الوسطية لإنتاج وحدة واحدة.
3. أعطِ مثالاً على سلعة مرونتها صغيرة جدًّا.

تمارين موجّهة

جِد مشتقة كل دالة.

4. $f(x)=x^2-3x$
5. $f(x)=x^{17}+5x^6$
6. $f(x)=x^{\frac{1}{2}}$
7. $f(x)=x^{-2}$
8. $f(x)=\sqrt{x}$
9. $f(x)=\frac{1}{x^7}$
10. $f(x)=2x^5+7x-4$
11. $f(x)=\frac{x^2-7}{4-x}$
12. تُشكِّل الدالَّة $R(Q)=25Q-0.05Q^2$ دالَّة المدخول (بآلاف الدنانير) لسلعة معيّنة حيث يُمثِّل Q عدد الوحدات المبيعة.

أ) جِد $R(50)$، واشرح ما يُمثله هذا الجواب.

ب) جِد دالَّة المدخول الهامشي $R_M(Q)$.

ج) جِد المدخول الهامشي عند $Q=50$. ما دلالة هذا الجواب بالنسبة إلى بيع وحدة إضافية؟

د) جِد $R(51)-R(50)$ ثم أوضح ما يُمثِّله هذا الفرق.

تمارين وتطبيقات

جِد مشتقَّة كل دالَّة.

13 $f(x)=x^{-4}+3x^{4}-x+16$

14 $f(x)=(2x^{2}+3x-7)(4x-6)$

15 $f(x)=(4x-1)^{5}$

16 $f(x)=e^{2x-1}$

17 $f(x)=2x-4e^{-x}+7$

18 $f(x)=\ln(0.1x)$

19 تُشكِّل الدالَّة $P(Q)=160-0.1Q$ دالَّة الطلب (بآلاف الدنانير) لسلعة معيّنة حيث يُمثِّل Q عدد الوحدات، وَ P سعر الوحدة الواحدة.

أ جِد دالَّة المدخول لبيع Q وحدة. ما المدخول الناتج عن بيع 500 وحدة؟

ب جِد المدخول الهامشي لبيع 500 وحدة وأعطِ تفسيرًا له.

ج أيُّهما يؤمِّن مدخولاً إضافيًّا أكبر: بيع وحدة إضافية عند مستوى البيع 500 أم عند مستوى البيع 700؟

20 تُشكِّل الدالَّة $C(Q)=300+6Q+\frac{1}{20}Q^{2}$ دالَّة الكلفة (بآلاف الدنانير) لسلعة معيّنة حيث يُمثِّل Q عدد الوحدات المنتجة.

أ جِد الكلفة الهامشية عند $Q=8$. ما دلالة هذا الجواب بالنسبة إلى إنتاج وحدة إضافية؟

ب جِد $C(9)-C(8)$. ما الكلفة الحقيقية لإنتاج الوحدة التاسعة؟

21 تُشكِّل الدالَّة $R(Q)=46Q$ دالَّة المدخول (بآلاف الدنانير) لسلعة معيّنة حيث يُمثِّل Q عدد الوحدات المبيعة وتُشكِّل الدالَّة $C(Q)=100+30Q+\frac{1}{10}Q^{2}$ دالَّة الكلفة.

أ جِد دالَّة الربح $Q(x)$.

ب جِد $P(100)$.

ج جِد دالَّة الربح الهامشي.

د جِد الربح الهامشي عند $Q=100$. ما دلالة هذا الجواب بالنسبة إلى إنتاج وحدة إضافية؟

هـ جِد $P(101)-P(100)$، ثم أوضح ما يُمثِّله هذا الفرق.

22 تُشكِّل الدالَّة $R(x)=\frac{50x}{x^2+36}$ حيث $x\geq 0$ ، دالَّة المدخول الأسبوعي، بمليارات الدنانير، لفيلم سينمائي بدلالة x، عدد الأسابيع التي مضت على عرضه.

أ جِد القيم التي تجعل المدخول الهامشي صفرًا.

ب في أي أسبوع بلغت إيرادات عرض الفيلم حدَّها الأعلى؟

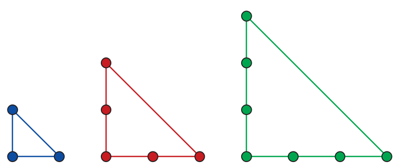
23 دالَّة المدخول لسلعة هي $R(Q)=24Q-0.01Q^2$ حيث يُمثِّل Q عدد الوحدات المبيعة. جِد دالَّة المدخول الهامشي. ما قيمة المدخول الهامشي عندما يكون مستوى المبيع 100 وحدة؟ ما هو المعنى الاقتصادي لهذه القيمة؟

24 تُشكِّل الدالّة $R(Q)=\frac{3000}{2x+2}+80Q-1500$ دالّة المدخول (بآلاف الدنانير) لبيع Q وحدة من سلعة معيّنة. جِد المدخول الهامشي عندما يكون مستوى المبيع 149 وحدة.

25 يتوقّف نجاح فيلم جيد صُنع بميزانية صغيرة على الدعاية الشفوية. إذا كانت الدالّة $A(x)=\frac{100x}{(x+10)^2}$ تمثّل عدد المشاهدين لهذا الفيلم بعد x أسبوعًا، جِد التغيُّر في عدد المشاهدين الناتج من عرضه أسبوعًا إضافيًّا بعد 10 أسابيع من بدء العرض، ثم بعد 20 أسبوعًا. اشرح النتائج التي توصّلت إليها.

نظرة إلى الوراء

26 يُبيِّن الرسم المقابل نمطًا هندسيًّا.



أ جِد عدد النقاط في كل من الأشكال الثلاثة التالية في هذا النمط.

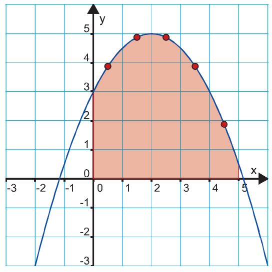
ب إذا كان a_n عدد النقاط في الشكل ذي الرتبة n في هذا النمط، اكتب حدود المتتالية من $n=1$ إلى $n=10$.

ج هل تستطيع تصنيف هذه المتتالية؟ برِّر جوابك.

د كم نقطة في الشكل ذي الرتبة 100؟

نظرة إلى الأمام

27 يُبيِّن الشكل المقابل بيان الدالَّة $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+3$ والمنطقة التي تقع بين المحور y والمستقيم $x=5$ ، فوق المحور x وتحت بيان الدالَّة. سوف تجد قيمة تقريبية لمساحة هذه المنطقة الملوَّنة.



أ اقسم المنطقة إلى 5 مستطيلات قاعدة الواحد منها تساوي 1. ما عدد المستطيلات؟

ب جِد طول كل مستطيل عن طريق حساب قيمة الدالَّة عند قيمة x التي تقع في منتصف قاعدته. أكمل الجدول.

x	$f(x)$
0.5	
1.5	
2.5	
3.5	
4.5	

ج يُشكِّل مجموع مساحات هذه المستطيلات قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الملوَّنة. ما هي هذه القيمة؟

الدرس 2

التكامل

Integral

لماذا؟

يُمكن لمُخطِّطي المباريات الرياضية استعمال المتتاليات الهندسية لتحديد عدد المباريات في كل دور.

الأهداف

- يجد التكامل غير المحدَّد لدالَّة.
- يحسب التكامل المحدَّد.
- يستعمل التكامل المحدَّد والتكامل غير المحدَّد لحل مسائل.

المفردات
Vocabulary

التكامل غير المحدَّد
Indefinite integral

التكامل المحدَّد
Definite integral

الدالَّة الأصلية
Antiderivative

ثابت التكامل
Constant of integration

تعرف، ولا شك، قواعد الاشتقاق ومنها

- إذا كان $f(x)=k$ حيث k عدد ثابت، فإن $f'(x)=0$.
- إذا كان $f(x)=x^n$ حيث $n\neq 0$ عدد ثابت، فإن $f'(x)=nx^{n-1}$.
- إذا كان $f(x)=e^{kx}$ حيث k عدد ثابت، فإن $f'(x)=ke^{kx}$.
- إذا كان $f(x)=\ln kx$ حيث k عدد ثابت، فإن $f'(x)=\frac{k}{x}$.

هل تساءلت يومًا إن كان لعملية الاشتقاق عملية عكسية أي إذا كان لديك دالّة $f(x)$ فهل تستطيع إيجاد دالّة $F(x)$ بحيث تكون $f(x)$ مشتقّتها أي $F'(x)=f(x)$؟
يمكنك التفكير في الأمر محاولاً القيام بالعمليات العكسية التي تؤدّي إلى المشتقّة.
فلكي تجد مشتقّة الدالّة $f(x)=x^n$، تطرح 1 من الأس n، وتضرب الدالّة في الأس القديم فتحصل على $f'(x)=nx^{n-1}$. لو حاولت القيام بالعمليات العكسية التي أدت إلى المشتقّة، لكان عليك زيادة 1 إلى الأس، وقسمة الدالّة على الأس الجديد.
وهكذا:

- إذا كان $f(x)=0$ حيث k عدد ثابت، فإن $F(x)=k$.
- إذا كان $f(x)=nx^{n-1}$ حيث $n\neq 0$ عدد ثابت، فإن $F(x)=x^n$.
- إذا كان $f(x)=ke^{kx}$ حيث k عدد ثابت، فإن $F(x)=e^{kx}$.
- إذا كان $f(x)=\frac{1}{x}$ ، فإن $F(x)=\ln x$.

مثل هذه الدالّة $F(x)$ تُسمى **الدالّة الأصلية** للدالّة $f(x)$.

مثال 1

بالنسبة إلى كل دالّة $f(x)$ ، جد دالّة $F(x)$ تحقّق $F'(x)=f(x)$.

أ $f(x)=x^6$ ب $f(x)=\frac{5}{x}$ ج $f(x)=4e^{4x}$

الحل

أ $F(x)=\frac{1}{6+1}x^{6+1}$ أي $F(x)=\frac{1}{7}x^{7}$

ب $F(x)=5\ln x$ ج $F(x)=e^{4x}$

حـــاولْ **بالنسبة إلى كل دالَّة** $f(x)$ ، **جد دالَّة** $F(x)$ **تحقِّق** $F'(x)=f(x)$.

أ $f(x)=x^{11}$ ب $f(x)=\frac{3}{x}$ ج $f(x)=5e^{5x}$

عندما تبحث عن مشتقّة دالَّة، فإنك تجد دالَّة وحيدة كجواب. لكن الأمر مختلف عند البحث عن الدالَّة الأصلية، فلو كانت $f(x)=3x^2$ مثلا ، لكانت الدالَّة $F(x)=x^3$ دالَّة أصلية لها وكذلك الأمر بالنسبة إلى الدالَّة $G(x)=x^3+C$ ، حيث C عدد حقيقي لأن:

$$G(x)=\left(x^3+C\right)'=\left(x^3\right)'+\left(C\right)'=3x^2+0=3x^2=f(x)$$

التكامل غير المحدَّد Indefinite Integral

تُسمَّى عملية البحث عن دالَّة أصلية **التكامل**. ويستعمل العاملون في حقل الرياضيات رمزًا خاصًّا للدلالة على الأمر. هذا الرمز هو $\int$ بحيث ترمز الكتابة $\int f(x)dx$ إلى أي دالَّة أصلية للدالَّة $f(x)$.

فإذا كانت $F(x)$ دالَّة أصلية للدالّة $f(x)$ يكون

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

حيث C عدد حقيقي يُسمّى **ثابت التكامل**.

التكامل غير المحدَّد

التكامل غير المحدَّد لدالَّة $f(x)$ ، ويُكتب

$\int f(x)dx$ ،

هو أي دالَّة أصلية لهذه الدالَّة.

تعلَّمت أن للاشتقاق قواعد. ينتج من ذلك، ومن أن التكامل عملية عكسية للاشتقاق، قواعد للتكامل.

يُبيّن الجدول عددًا من قواعد الاشتقاق وقواعد التكامل الناتجة منها.

قاعدة التكامل	قاعدة الاشتقاق
$\int 0dx=k$	$(k)'=0$
$\int x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}+C$	$(x^n)'=nx^{x-1}$
$\int e^x dx=e^x+C$	$(e^x)'=e^x$
$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$\int u'(x)e^{u(x)}dx=e^{u(x)}+C$	$\left(e^{u(x)}\right)'=u'(x)e^{u(x)}$
$\int \frac{u'(x)}{u(x)}dx=\ln n(x)+C$	$\left(\ln u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{u(x)}$
$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$	$\left(kf(x)\right)'=kf'(x)$
$\int (f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$	$\left(f(x)+g(x)\right)'=f'(x)+g'(x)$

مثال 2

جد كل تكامل غير محدَّد.

أ $\int 4x^3dx$ ب $\int (5x^4-2x^3)dx$ ج $\int \frac{3}{x}dx$ د $\int e^{-2x}dx$

الحل

أ $\int 4x^3dx=4\int x^3dx=4\left(\frac{1}{4}x^{3+1}\right)+C=x^4+C$

ب $\int (5x^4-2x^3)=\int 5x^4dx-\int 2x^3dx=x^5-2\left(\frac{1}{4}x^4\right)+C=x^5-\frac{1}{2}x^4+C$

ج $\int \frac{3}{x}dx=3\int \frac{1}{x}dx=3\ln x+C$

د $\int e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int -2e^{-2x}dx=-\frac{1}{2}\int (-2x)'e^{(-2x)}dx=-\frac{1}{2}e^{-2x}+C$

حاولْ

جد كل تكامل غير محدَّد.

أ $\int 3x^5dx$ ب $\int (2x^5+7x^6)dx$ ج $\int \frac{5}{x}dx$ د $\int e^{3x}dx$

تذكَّر أن القياسات الهامشية في الاقتصاد هي مشتقّات. فإذا عرفت دالَّة مقياس هامشي، كالكلفة الهامشية لإنتاج سلعة مثلاً، تستطيع أن تجد دالَّة الكلفة لإنتاج هذه السلعة.

مثال 3

إيجاد دالَّة الكلفة

دالَّة الكلفة الهامشية لإنتاج سلعة هي $C_m(Q)=3Q^2-20Q+36$

جِد دالَّة الكلفة لإنتاج هذه السلعة.

الحل

دالَّة الكلفة لإنتاج هذه السلعة هي دالَّة أصلية لدالَّة الكلفة الهامشية.

$$\begin{aligned} C(Q)&=\int C_m(Q)dQ \\ &=\int (3Q^2-20Q+36)dQ \\ &=\int 3Q^2dQ-\int 20QdQ+\int 36dQ \\ &=Q^3-10Q^2+36Q+k \end{aligned}$$

k هو ثابت التكامل. إنه يساوي قيمة الكلفة عند $Q=0$، أي إنه الكلفة الثابتة للإنتاج.

GRADE12-CHAP-5-Adabi (2)-13 2/12/15 1:24 PM Page 14

حـــاولْ دالة الكلفة الهامشية لإنتاج سلعة هي:

$$C_m(Q) = 3Q^2 - 6Q + 5$$

جِد دالَّة الكلفة لإنتاج هذه السلعة، علمًا بأن الكلفة الثابتة للإنتاج هي 10.

التكامل المحدَّد Definite Integral

يستعمل العاملون في حقل الرياضيات التكامل غير المحدَّد لحساب ما يُسمّى بالتكامل المحدَّد.

التكامل المحدَّد

التكامل المحدَّد لدالَّة $f(x)$ بين a وَ b هو

$$\int_a^b f(x) = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

حيث ترمز $F(x)$ إلى دالَّة أصلية للدالَّة $f(x)$.

لاحظ أن اختيار الدالَّة الأصلية $F(x)$ للدالَّة $f(x)$ لا يؤثِّر في قيمة التكامل المحدَّد. فإذا كانت $G(x) = F(x) + C$ دالَّة أصلية أخرى للدالَّة $f(x)$ فإن:

$$G(b) - G(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) + C - F(a) - C = F(b) - F(a)$$

مثـــــال 4 **ايجاد تكامل محدَّد**

جِد كل تكامل محدَّد.

أ $\int_1^5 2x dx$ ب $\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)dx$ ج $\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)dx$ د $\int_0^1 2e^x dx$

الحل

أ $\int_1^5 2x dx = [x^2]_1^5 = 5^2 - 1^2 = 25 - 1 = 24$

ب
$$\int_0^3 (x^2 - 3x + 4)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x\right]_0^3$$
$$= \left[\frac{1}{3}3^3 - \frac{3}{2}3^2 + 4\times 3\right] - \left[\frac{1}{3}0^3 - \frac{3}{2}0^2 + 4\times 0\right]$$
$$= 9 - \frac{27}{2} + 12$$
$$= 9 - \frac{3}{2}$$
$$= \frac{15}{2}$$

ج $\int_1^2 \frac{3}{x} dx = [3\ln]_1^2 = 3[\ln x]_1^2 = 3(\ln 2 - \ln 1) = 3(\ln 2 - 0) = 3\ln 2$

د $\int_0^1 2e^x dx = 2\int_0^1 e^x dx = 2[e^x]_0^1 = 2(e^1 - e^0) = 2(e - 1)$

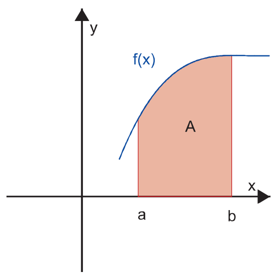
حـــاولْ جِد كل تكامل محدَّد.

أ $\int_0^3 3x^2\,dx$ ب $\int_1^2 (3x^2+5x-4)\,dx$

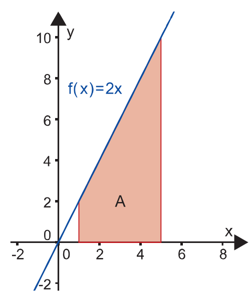
ج $\int_1^2 \frac{-2}{x}\,dx$ د $\int_1^2 -3e^x\,dx$

حساب المساحة

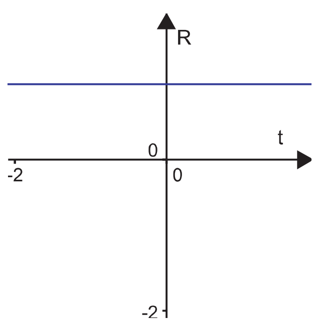
يُبرهن العاملون في حقل الرياضيات الآتي: إذا كان $f(x)\geq 0$ أيًّا تكن قيمة x بين a وَ b، فإن التكامل المحدَّد $\int_a^b f(x)dx$ يساوي مساحة المنطقة التي يحدّها من الأسفل المحور x ومن الأعلى بيان الدالّة $f(x)$ ومن اليمين واليسار المستقيمان $x=a$ وَ $x=b$.



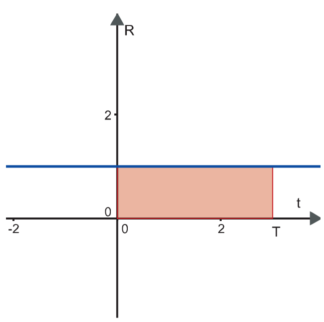
إذا عدت إلى المثال $\int_1^5 2xdx$ فإن هذا التكامل المحدَّد يساوي مساحة شبه المنحرف الملوَّن.



تتغيّر بعض المتغيِّرات الاقتصادية، كالمدخول، بتغيُّر الزمن. افرض أن مدخول مؤسَّسة يتحدَّد بمعدَّل ثابت قدره ألف مليون دينار في السنة. يُمكنك أن تكتب دالَّة المدخول الهامشي كدالَّة بدلالة الزمن (بالسنوات) كما يلي: $R_m(t)=1000$



بيان هذه الدالَّة مستقيم أفقي.
ما مجموع المداخيل بين السنة $t=0$ وَ $t=T$ ؟ إنه $1000T$ مليون دينار. يُمكن تمثيل هذا المجموع بالمنطقة الملوَّنة في الرسم البياني المقابل.



كما يُمكن تفسيره، بالاستناد إلى ما سبق، على أنه التكامل المحدد للدالَّة $R_m(t)=1000$ بين $t=0$ وَ $t=T$، أي

$$\int_0^T 1000\,dt=\left[1000t\right]_0^T=1000T$$

قد لا يكون معدّل المدخول ثابتًا، وقد يتغيّر مع الزمن، ممّا يؤدّي إلى دالَّة للمدخول الهامشي مختلفة عن الدالَّة الثابتة. غير أن مجموع المداخيل بين فترتَيْن $t=a$ وَ $t=b$ من الزمن يُبقي التكامل المحدَّد بين a وَ b لدالَّة المدخول الهامشي.

مثـــــال 5

تمثِّل الدالَّة $R_m(Q)=16200-2Q$ دالَّة المدخول الهامشي لمؤسَّسة. جد مدخول المؤسَّسة الناتج من بيع 1200 وحدة.

الحل

المدخول الناتج من بيع 1200 وحدة هو

$$\int_0^{1200} R_m(Q)dx$$

احسب هذا التكامل المحدَّد.

$$\int_0^{1200} R_m(Q)dQ=\int_0^{1200}(16200-2Q)dx$$

$$=\left[16200Q-Q^2\right]_0^{1200}$$

$$=18000000$$

حـــاولْ دالَّة الكلفة الهامشية لمؤسَّسة هي $C_m(Q)=3Q^2-16Q+12$، جد كلفة إنتاج 600 وحدة.

التمـــــاريـــــن

التواصل في الرياضيات

1. فسِّر العلاقة بين الاشتقاق والتكامل.
2. وضِّح الفرق بين التكامل المحدَّد والتكامل غير المحدَّد.
3. ماذا يُمثِّل التكامل المحدَّد $\int_1^3 xdx$ هندسيًّا؟

تمارين موجَّهة

جِد كل تكامل غير محدَّد.

4. $\int 4x^3dx$
5. $\int (3x^2-2x)dx$
6. $\int x^{-2}dx$
7. $\int e^{2x}dx$

جِد كل تكامل محدَّد.

8 $\int_1^3 4x^3dx$ **9** $\int_1^2 x^{-2}dx$

10 جِد دالَّة الربح لمؤسَّسة علمًا بأن دالَّة المدخول الهامشي هي $R_m(Q)=22-2Q$ ودالَّة الكلفة الهامشية هي $C_m(Q)=2Q^2-6Q+6$، وأن لا كلفة ثابتة للإنتاج.

تمارين وتطبيقات

جِد كل تكامل غير محدَّد.

11 $\int\left(x^{-1}+x\right)dx$

12 $\int\left(e^{ax}-1\right)dx$ حيث $a\neq 0$

13 $\int\left(e^{-x}+\frac{4}{x^2}\right)dx$

14 $\int e^{kx}dx$ حيث $a\neq k$

جِد كل تكامل محدَّد.

15 $\int_1^4 -2x^2dx$

16 $\int_{-1}^1\left(2x+e^{-x}\right)dx$

17 دالَّة الكلفة الهامشية هي $CM(Q)=3Q^2-28Q+84$. جِد دالَّة الكلفة علمًا بأن الكلفة الثابتة هي 92.

18 دالَّة المدخول الهامشي هي $CM(Q)=120-8Q$. جِد دالَّة المدخول (لاحظ أن المدخول يساوي 0 عند $Q=0$).

19 دالَّة الادِّخار الهامشي لعائلة هي $f(R)=0.5+\frac{1}{\sqrt{R}}$ حيث يمثِّل R المدخول. جِد دالَّة الادِّخار لهذه العائلة $F(R)$، علمًا بأن الادِّخار يساوي 20 عندما يساوي المدخول 100.

20 دالَّة المدخول الهامشي لمؤسَّسة هي $RM(Q)=84-4Q$. جِد دالَّة المدخول لهذه المؤسَّسة، علمًا بأن مدخولها يساوي 0 عند $Q=0$.

21 دالَّة الاستهلاك الهامشي لعائلة هي $f(R)=0.5+\frac{2}{\sqrt{R}}$، حيث يمثِّل R المدخول. جِد دالَّة الاستهلاك لهذه العائلة $F(R)$ ، علمًا بأن الاستهلاك يساوي 25 عندما يساوي المدخول 25.

22 دالَّة المدخول الهامشي هي $R_m(Q)=34-3Q$ ودالَّة الكلفة الهامشية هي $C_m(Q)=Q^2-10Q+26$. وأن لا كلفة ثابتة للإنتاج.

أ جِد دالَّة الربح لهذه المؤسَّسة.

ب ما الكمّية Q التي تؤمِّن للمؤسَّسة أعلى مستوى ممكن من الربح؟

23 الدالَّة الهامشية لإنتاج أحد المصانع هي $P(t)=Ae^{0.6t}$. جِد الكمّية التي أنتجها هذا المصنع بين الفترة $t=0$ ، والفترة $t=1$ ، ثم بين الفترة $t=1$ والفترة $t=2$. ما نسبة الزيادة في الإنتاج في الفترة الثانية نسبة إلى الفترة الأولى؟

نظرة إلى الوراء

24 دالَّة المدخول لمؤسَّسة هي $R(Q)=1400Q-6Q^2$ ودالَّة الكلفة $C(Q)=1500+80Q$.
جِد الكمّية Q التي تؤمِّن للمؤسَّسة أعلى ربح ممكن.

25 بقيت دالَّة المدخول للمؤسَّسة على حالها أي $R(Q)=1400-6Q^2$ وتغيَّرت دالَّة الكلفة لتصبح هي $C(Q)=3000+80Q$.

أ جِد الكمّية Q التي تؤمِّن للمؤسَّسة أعلى ربح ممكن.

ب هل اختلف جوابك عن جواب التمرين 25 ؟ وضّح ذلك.

نظرة إلى الأمام

26 بيّن أن الكمّية التي تؤمِّن لمؤسَّسة أعلى ربح ممكن هي الكمّية التي يتساوى فيها المدخول الهامشي مع الكلفة الهامشية.